

وزارة التعليم العالي والبحث العلمي

BADJI MOKHTAR-ANNABA
UNIVERSITY
UNIVERSITE BADJI
MOKHTAR-ANNABA



جامعة باجي مختار
- عنابة -

Faculté des Sciences
Département de Mathématiques

Année : 2024/2025



THÈSE

Présentée en vue de l'obtention du diplôme de Doctorat

Solutions périodiques des systèmes différentiels ordinaires polynomiaux perturbés et bifurcation de Hopf

Filière : Mathématiques Appliquées
Spécialité : Mathématiques Appliquées
Présentée par :
BOUAZIZ Chamseddine

DIRECTEUR DE THÈSE: MAKHLOUF Amar Prof. U.B.M. ANNABA

Devant le jury :

PRESIDENT:	LAOUAR Abdelhamid	Prof.	U.B.M. ANNABA
EXAMINATEUR :	HADIDI Elbahi	Prof.	U.B.M. ANNABA
EXAMINATEUR :	MENACEUR Amor	M.C.A	U. GUELMA
EXAMINATRICE :	BOULFOUL Amel	M.C.A	U. SKIKDA

Table des matières

Remerciements	iii
اهداء	iv
Résumé	v
ملخص	vi
Abstract	vii
Introduction	viii
1 Notions Préliminaires	1
1.1 Systèmes dynamiques	1
1.2 Systèmes différentiels polynomiaux	2
1.3 Solution d'un système différentiel	2
1.4 Point d'équilibre et linéarisation	2
1.4.1 Point d'équilibre	2
1.4.2 Linéarisation	3
1.4.3 Classification des points d'équilibre	3
1.5 Stabilité des points d'équilibre	5
1.6 Orbites périodiques et cycles limites	6
1.6.1 Orbites périodiques	6
1.6.2 Cycles limites	6
1.7 Stabilité des cycles limites	6
1.8 Existence des cycles limites	7
1.9 Ensemble isochrone	8
1.10 Bifurcation	8
1.11 Bifurcation de Hopf	9

1.12	Bifurcation zéro-Hopf	10
2	Systèmes de Lotka-Volterra	12
2.1	Modèle prédateurs-proies de Lotka-Volterra	12
2.1.1	Nature des points d'équilibre	12
2.2	Espèces en compétition	15
3	Bifurcation du cycle limite à partir d'un équilibre zéro-Hopf pour une classe de systèmes de Kolmogorov tridimensionnels	19
3.1	Introduction et énoncés des principaux résultats	19
3.2	Théorie de moyennisation pour les orbites périodiques	21
3.3	Preuve de la proposition 1 et du théorème 3.1.1.	22
3.4	Conclusion	52
4	Bifurcation zéro-Hopf dans un système différentiel polynômial quartique dans \mathbb{R}^4 utilisant la théorie de moyennisation du 3^{ème} ordre	54
4.1	Introduction	54
4.2	Théorie de moyennisation du premier, deuxième et troisième ordre	56
4.3	Preuve du théorème 4.1.1 et du corollaire 3	57
4.4	Conclusion	67
	Conclusion et Perspectives	68
	Bibliographie	69
	Annexe	72

Remerciements

”**Alhamdulillah**”, je loue Allah pour sa grandeur et de m’avoir donné la force et le courage pour terminer cette thèse.

Je serai toujours reconnaissant envers mon directeur de thèse, **le professeur Amar Makhlouf** de l’Université Badji Mokhtar-Annaba, pour sa précieuse supervision, son orientation et ses encouragements. Je tiens aussi à exprimer ma sincère gratitude pour sa gentillesse, son soutien bienveillant et ses conseils tout au long de ma préparation de cette thèse. Merci beaucoup, professeur.

Je tiens à remercier **Pr. Abdelhamid Laouar**, de l’Université Badji Mokhtar-Annaba, pour l’honneur de présider le jury de cette thèse. Je tiens également à remercier les membres du comité d’évaluation : **Pr. Elbahi Hadidi** de l’Université Badji Mokhtar-Annaba, **Amor Menaceur** de l’Université de Guelma, et **Amel Boufoul**, de l’Université de Skikda, pour avoir fait partie de ce jury.

اهداء

إلى والديّ الحبيبين، نبراس حياتي، اللذين كانا دومًا سندًا وعاونًا لي في كل خطوة.
إلى أخوتيّ العزيزين، شريكي الدرب وأقرب الناس إلى قلبي.
إلى أهلي الكرام، عائلتي الكبيرة التي أفخر بها دائمًا.
إلى أصدقائي الأوفياء، الذين وقفوا بجاني في لحظات الفرح والحزن.
إلى معارفي، كل من ترك بصمة في حياتي وأسهم في تكويني.
إلى أساتذتي الأفاضل، الذين نهلت من علمهم واستفدت من توجيهاتهم.
إلى كل من ساعدني من قريب أو بعيد، ولكل من كان له دور في تحقيق هذا العمل.
إلى جميعكم، أهدي هذا العمل خالصًا من القلب.

Résumé

Le but de cette thèse est de déterminer des conditions suffisantes de l'existence de solutions périodiques dans certains systèmes différentiels perturbés par un petit paramètre ε , en utilisant la théorie de la moyennisation.

Pour cela, nous étudions le problème de la détection de cycles limites issus d'un équilibre zéro-Hopf, pour une classe de systèmes de Kolmogorov de degré 3 dans \mathbb{R}^3 , en appliquant la théorie de moyennisation du premier ordre, ainsi que pour un système différentiel de degré 4 dans \mathbb{R}^4 , en utilisant la théorie de moyennisation du troisième ordre.

Enfin, nous illustrons les résultats obtenus par des exemples concrets. Tous les calculs réalisés dans cette thèse sont effectués à l'aide des logiciels "**Maple et Mathematica**".

Mots-clés : Cycle limite, Solution périodique, Système de Kolmogorov, Système différentiel, Théorie de moyennisation.

ملخص

هدف هذه الرسالة هو تحديد الشروط الكافية لوجود حلول دورية في أنظمة تفاضلية محددة تتعرض للإضطراب بالإعتماد على معاملات صغيرة، باستخدام نظرية التوسيط.

و لهذا، ندرس مشكلة الكشف عن الدورات المحدودة الناتجة عن توازن من نوع زيروهوف و ذلك بالنسبة لفئة من أنظمة كولوغوروف من الدرجة الثلاثة في \mathbb{R}^3 ، بتطبيق نظرية المتوسط من الدرجة الأولى، و كذلك بالنسبة لنظام تفاضلي من الدرجة الرابعة في \mathbb{R}^4 ، باستخدام نظير التوسيط من الدرجة الثالثة.

أخيراً، نعرض النتائج من خلال أمثلة ملموسة. ومن الجدير بالذكر أن جميع الحسابات التي أُجريت في هذه الرسالة تم تنفيذها باستخدام البرنامجين "Maple" و "Mathematica" .

الكلمات المفتاحية : نظرية المتوسط، النظام التفاضلي، نظام كولوغوروف، الدورة المحدودة، الحل الدوري.

Abstract

The objective of this thesis is to identify sufficient conditions of the existence of periodic solutions in specific differential systems which are perturbed by a small parameter, using averaging theory.

We address the challenge of detecting limit cycles emerging from a zero-Hopf equilibrium within a class of Kolmogorov systems of degree 3 in \mathbb{R}^3 , using first-order averaging theory, as well as for a differential system of degree 4 in \mathbb{R}^4 , using third-order averaging theory.

Finally, we illustrate the results through concrete examples. We note that all computations performed in this thesis were carried out using the software "**Maple and Mathematica**".

Keywords : Averaging theory, Differential system, Kolmogorov system, Limit cycle, Periodic solution.

Introduction

Les systèmes dynamiques jouent un rôle central dans la modélisation de nombreux phénomènes naturels et sociaux. Ils décrivent comment l'état d'un système évolue au fil du temps en fonction de certaines lois ou équations, qu'elles soient déterministes ou stochastiques. Ces systèmes sont généralement définis par des équations différentielles ou des équations aux différences d'évolution.

En fonction de leur comportement et de leur sensibilité aux conditions initiales, les systèmes dynamiques peuvent être classés en plusieurs catégories

- **Systèmes dynamiques continus** (*Systèmes à temps continu*) : Ces systèmes évoluent de manière continue dans le temps et sont décrits par des équations différentielles [45, 53].

Exemple : Le mouvement d'un pendule.

- **Systèmes dynamiques discrets** (*Systèmes à temps discret*) : Les systèmes évoluent à des intervalles de temps discrets et sont décrits par des équations aux différences [1].

Exemple : Les modèles de croissance démographique.

- **Systèmes stochastiques** : Ces systèmes intègrent des éléments aléatoires, rendant leurs évolutions futures incertaines même si les conditions initiales sont connues [53].

Exemple : Le mouvement brownien.

En outre, il est possible de classer les systèmes dynamiques selon leur prévisibilité :

- ▶ **Déterministes** : Ces systèmes sont entièrement déterministes, et si les conditions initiales sont bien connues, il est possible de prévoir avec précision leur comportement futur [33, 40].

Exemple : Le mouvement des planètes dans le système solaire.

- ▶ **Semi-déterministes** : Ces systèmes montrent un comportement prévisible à court terme, mais deviennent imprévisibles sur le long terme en raison de leur sensibilité aux conditions initiales [1, 33].

Exemple : Les prévisions météorologiques, qui sont fiables pour quelques jours seulement.

- ▶ **Non déterministes** : Même avec des conditions initiales bien définies, ces systèmes sont si sensibles aux variations infimes qu'il est impossible de prévoir leur comportement à long terme. Ces systèmes sont souvent associés à des phénomènes chaotiques [33, 53].

Exemple : La turbulence dans les fluides ou certains modèles économiques.

L'évolution de la théorie des systèmes dynamiques remonte au XVIIe siècle, avec les travaux de Newton sur le calcul différentiel et les lois du mouvement. Plus tard, au XIXe siècle, Henri Poincaré a apporté des contributions majeures à la compréhension des systèmes non linéaires, devenant ainsi une figure centrale dans l'étude des dynamiques complexes.

Un cycle limite est une orbite fermée isolée, c'est à dire que les trajectoires voisines ne sont pas fermées. Les trajectoires se rapprochent du chemin fermé ou s'en éloignent en spirale. C'est un phénomène non linéaire qui se produit dans de nombreux systèmes physiques, tels que la trajectoire d'un satellite, les processus biochimiques, le modèle prédateur-proie, les circuits électriques non linéaires, le modèle de croissance économique, l'écologie, les battements du cœur, les vibrations auto-entretenues dans les ponts et les ailes d'avion, les rythmes quotidiens de la température corporelle humaine, la sécrétion d'hormones, etc. Les systèmes linéaires ne peuvent pas avoir de cycles limites.

Le grand mathématicien David Hilbert a présenté 23 problèmes mathématiques exceptionnels lors du deuxième congrès international de mathématiques en 1900, et la deuxième partie du 16^e problème de Hilbert consistait à déterminer le nombre maximum de cycles limites H_n d'un système polynomial de degré n :

$$\dot{x} = \sum_{i+j=0}^n a_{ij}x^i y^j$$

$$\dot{y} = \sum_{i+j=0}^n b_{ij}x^i y^j$$

Pour $(a, b) \in \mathbb{R}^{(n+1)(n+2)}$, le nombre de cycles limites $H_n(a, b)$ du système ci-dessus doit être fini. Cela peut être confirmé par le théorème de Dulac. Pour un système non linéaire dans \mathbb{R}^2 , il est difficile de déterminer le nombre de cycles limites.

En 1962, le mathématicien russe N.V. Bautin a prouvé que tout système quadratique possède au maximum trois cycles limites. Cependant, en 1979, les mathématiciens chinois S.L. Shi, L.S. Chen et M.S. Wang ont établi qu'un système quadratique peut avoir quatre cycles limites. Cela a été prouvé par Y.X. Chin en 1984. Un système cubique peut avoir au moins 11 cycles limites. Ainsi, la détermination du nombre de cycles limites est extrêmement difficile pour un système en général [33].

Il existe essentiellement trois types de cycles limites : les cycles limites stables, instables et semi-stables. Un cycle limite est dit stable (ou attractif) s'il attire toutes les trajectoires voisines. Si les trajectoires voisines sont repoussées du cycle limite, on parle alors d'un cycle limite instable (ou répulsif). Un cycle limite semi-stable est celui qui attire des trajectoires d'un côté et les repousse de l'autre. Ces trois types de cycles limites sont illustrés dans la Figure 1. Scientifiquement, les cycles limites stables sont très importants.

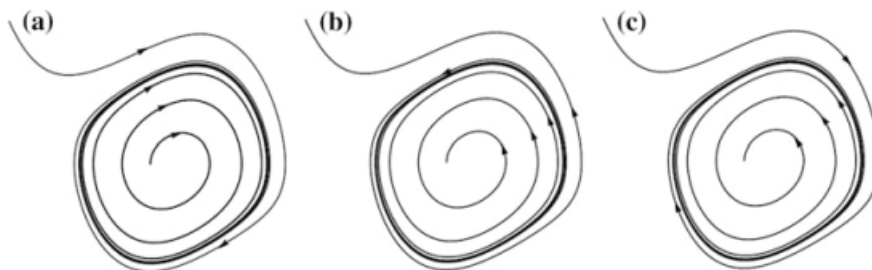


FIGURE 1: **a** : stable, **b** : instable, **c** : semi-stable

Il est extrêmement difficile de prouver l'existence d'un cycle limite ou d'une solution périodique pour un système non linéaire dans \mathbb{R}^n , avec $n \geq 3$. Le théorème de Poincaré-Bendixson

permet de prouver l'existence d'au moins une orbite périodique pour un système autonome dans \mathbb{R}^2 sous certaines conditions.

L'objectif principal de ce théorème est de trouver une « région annulaire » qui ne contient aucun point d'équilibre du système, et dans laquelle on peut trouver au moins une orbite périodique. La démonstration de ce théorème se trouve dans [33, 54].

Obtenir analytiquement des solutions périodiques est généralement un travail difficile, souvent impossible. La théorie de moyennisation réduit ce problème complexe, pour certaines équations différentielles ordinaires perturbées, à la recherche des zéros de fonctions non linéaires.

La théorie de moyennisation a été introduite par Bogoliubov et Krylov en 1934 [7], puis développée par Bogoliubov et Mitropolsky (1961) [8]. Elle a ensuite été approfondie par Verhulst [54], Sanders, Verhulst et Murdock [49], Malkin (1956) [42], Roseau (1966) [48], Buică et Llibre (2004) [14], etc.

Cette thèse est organisée comme suit

✓ **chapitre 1 : Notions Préliminaires.**

Ce chapitre présente un rappel des notions préliminaires classiques et des outils mathématiques nécessaires à l'étude de cette thèse.

✓ **chapitre 2 : Systèmes de Lotka–Volterra.**

Ce chapitre explore le modèle de Lotka-Volterra pour les systèmes prédateurs-proies et la compétition entre espèces. Dans la première section, le modèle classique de Lotka-Volterra est présenté, décrivant l'évolution de deux populations, proies et prédateurs. Le système d'équations différentielles modélise la croissance des proies, proportionnelle à leur nombre, et la décroissance des prédateurs en fonction des rencontres avec les proies. Le chapitre analyse également les points d'équilibre et démontre que les trajectoires autour de certains points d'équilibre sont des ellipses, identifiant ces points comme des centres stables ou des selles instables.

Ensuite, il se penche sur le modèle de compétition entre deux espèces, mettant en évidence deux comportements possibles : la coexistence ou l'exclusion mutuelle, où l'une des espèces s'éteint. L'étude approfondit les conditions nécessaires à la stabilité des équilibres dans des systèmes compétitifs à deux espèces, tout en fournissant des exemples numériques illustrant ces phénomènes à travers des portraits de phase.

Enfin, le chapitre élargit l'analyse aux systèmes de Lotka-Volterra avec plusieurs espèces, en introduisant un cadre général pour des interactions complexes entre n espèces, accompagné d'exemples spécifiques de systèmes à trois espèces.

✓ **chapitre 3 : Bifurcation de cycle limite à partir d'un équilibre zéro-Hopf pour une classe de systèmes de Kolmogorov tridimensionnels.**

Dans ce chapitre, nous caractérisons, en utilisant la théorie de moyennisation du premier ordre, les huit bifurcations zéro-Hopf distinctes pouvant apparaître dans la classe des systèmes de Kolmogorov tridimensionnels de degré 3. Nous fournissons une approximation explicite des cycles limites de petite amplitude qui bifurquent ainsi que des informations sur leur type de stabilité.

Chacune de ces huit bifurcations zéro-Hopf distinctes engendre un ou deux cycles limites, selon la théorie de moyennisation du premier ordre. De plus, nous présentons un exemple explicite pour chacune de ces bifurcations zéro-Hopf.

Dans nos travaux, nous avons étudié deux types de systèmes de Kolmogorov.

Le premier système s'écrit sous la forme

$$\begin{aligned}\dot{x} &= x (a_1(x-1) + b_1(y-1) + c_1(z-1) + d_1(x-1)^2 + e_1(y-1)^2 + f_1(z-1)^2), \\ \dot{y} &= y (a_2(x-1) + b_2(y-1) + c_2(z-1) + d_2(x-1)^2 + e_2(y-1)^2 + f_2(z-1)^2), \\ \dot{z} &= z (a_3(x-1) + b_3(y-1) + c_3(z-1) + d_3(x-1)^2 + e_3(y-1)^2 + f_3(z-1)^2),\end{aligned}$$

et le deuxième système s'écrit sous la forme

$$\begin{aligned}\dot{x} &= x (a_1(x-1) + b_1(y-1) + c_1(z-1) + d_1(x-1)^2 + e_1(x-1)(y-1) + f_1(x-1) \\ &\quad (z-1) + g_1(y-1)^2 + h_1(y-1)(z-1) + k_1(z-1)^2), \\ \dot{y} &= y (a_2(x-1) + b_2(y-1) + c_2(z-1) + d_2(x-1)^2 + e_2(x-1)(y-1) + f_2(x-1) \\ &\quad (z-1) + g_2(y-1)^2 + h_2(y-1)(z-1) + k_2(z-1)^2), \\ \dot{z} &= z (a_3(x-1) + b_3(y-1) + c_3(z-1) + d_3(x-1)^2 + e_3(x-1)(y-1) + f_3(x-1) \\ &\quad (z-1) + g_3(y-1)^2 + h_3(y-1)(z-1) + k_3(z-1)^2),\end{aligned}$$

où x , y , et z sont supposés positifs et le point indique la dérivée par rapport au temps t .

L'article qui étudie le premier système a été publié dans la revue "*Applied Mathematics E-Notes*" sous le titre "*Periodic Orbits In The Zero-Hopf Bifurcations Of 3-Dimensional Kolmogorov Systems Of Degree 3*", voire [9].

Quant à l'article du deuxième système, il a été publié dans la revue "*Partial Differential Equations in Applied Mathematics*" sous le titre "*Limit cycle bifurcation from a zero-Hopf equilibrium for a class of 3-dimensional Kolmogorov systems*", voire [10].

Dans ce chapitre, nous nous concentrerons uniquement sur le deuxième article, car, comme on peut le constater, le deuxième système est une généralisation du premier.

✓ chapitre 4 : Bifurcation zéro-Hopf dans un système différentiel polynômial quartique dans \mathbb{R}^4 utilisant la théorie de moyennisation du 3^{ème} ordre

Dans ce chapitre, nous allons montrer en utilisant la théorie de moyennisation du troisième ordre que, pour un système différentiel polynômial quartique en 4 dimensions, au maximum 36 cycles limites peuvent bifurquer à partir d'une singularité avec des valeurs propres de la forme $\pm\omega i$, 0 et 0. Pour être plus précis, nous examinons les systèmes différentiels qui ont la forme suivante

$$\begin{aligned}\dot{x} &= (a_1\epsilon + a_2\epsilon^2 + a_3\epsilon^3)x - (b + b_1\epsilon + b_2\epsilon^2 + b_3\epsilon^3)y + \sum_{j=0}^2 \epsilon^j X_j(x, y, z, w), \\ \dot{y} &= (b + b_1\epsilon + b_2\epsilon^2 + b_3\epsilon^3)x + (a_1\epsilon + a_2\epsilon^2 + a_3\epsilon^3)y + \sum_{j=0}^2 \epsilon^j Y_j(x, y, z, w), \\ \dot{z} &= (c_1\epsilon + c_2\epsilon^2 + c_3\epsilon^3)z + \sum_{j=0}^2 \epsilon^j Z_j(x, y, z, w), \\ \dot{w} &= (d_1\epsilon + d_2\epsilon^2 + d_3\epsilon^3)w + \sum_{j=0}^2 \epsilon^j W_j(x, y, z, w),\end{aligned}$$

où

$$\begin{aligned}
X_j(x, y, z, w) = & a_{j0}x^4 + a_{j1}x^3y + a_{j2}x^3z + a_{j3}x^3w + a_{j4}x^2y^2 + a_{j5}x^2z^2 + a_{j6}x^2w^2 + \\
& a_{j7}x^2yz + a_{j8}x^2yw + a_{j9}x^2zw + a_{j10}xy^3 + a_{j11}xz^3 + a_{j12}xw^3 + a_{j13} \\
& xy^2z + a_{j14}xy^2w + a_{j15}xz^2y + a_{j16}xz^2w + a_{j17}xw^2y + a_{j18}xw^2z + \\
& a_{j19}xyzw + a_{j20}y^4 + a_{j21}y^3z + a_{j22}wy^3 + a_{j23}y^2z^2 + a_{j24}w^2y^2 + a_{j25} \\
& wy^2z + a_{j26}yz^3 + a_{j27}w^3y + a_{j28}wyz^2 + a_{j29}w^2yz + a_{j30}z^4 + a_{j31}wz^3 \\
& + a_{j32}w^2z^2 + a_{j33}w^3z + a_{j34}w^4,
\end{aligned}$$

$Y_j(x, y, z, w)$, $Z_j(x, y, z, w)$ et $W_j(x, y, z, w)$ ont la même expression que $X_j(x, y, z, w)$ en remplaçant a_{ji} par b_{ji} , c_{ji} et d_{ji} pour $j = 0, 1, 2$ et $i = 0, 1, \dots, 34$, respectivement. Les coefficients a_{ij} , b_{ij} , c_{ij} , d_{ij} , a_1 , a_2 , a_3 , b , b_1 , b_2 , b_3 , c_1 , c_2 , c_3 , d_1 , d_2 , d_3 sont des paramètres réels avec $b \neq 0$.

Cet article a été publié en ligne dans la revue *Computational Methods for Differential Equations* sous le titre *Zero-Hopf bifurcation in a four-dimensional quartic polynomial differential system via averaging theory of third order*, voir [11].

Notions Préliminaires

Dans ce chapitre, nous introduisons quelques notions générales et principales pour l'étude qualitative des systèmes dynamiques et des systèmes différentiels polynomiaux.

1.1 Systèmes dynamiques

Définition 1.1.1 *Un système dynamique sur \mathbb{R}^n est une application $U : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ telle que*

- 1 • $U(., x) : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$ est continue.
- 2 • $U(t, .) : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ est continue.
- 3 • $U(0, x) = x$.
- 4 • $U(t + s, x) = U(t, U(s, x)), \forall t, s \in \mathbb{R}, \forall x \in \mathbb{R}^n$.

Exemple 1 *Considérons le système linéaire*

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax, \\ x(0) = x_0, \end{cases} \quad (1.1)$$

La solution du système (1.1) est de la forme $x(t) = e^{tA}x_0$ où $t \geq 0$, $x \in \mathbb{R}^n$ et A est une matrice constante.

Le système (1.1) engendre un système dynamique $U(t, x)$ tel que

$$U : \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$$

$$U(t, x) = e^{tA}x.$$

Définition 1.1.2 *Un système dynamique U sur \mathbb{R}^n est dit linéaire si*

$$U(t, \alpha x + \beta y) = \alpha U(t, x) + \beta U(t, y), \quad (1.2)$$

$\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}, \forall x, y \in \mathbb{R}^n$ et $\forall t \geq 0$.

1.2 Systèmes différentiels polynomiaux

Définition 1.2.1 *Un système différentiel polynomial dans \mathbb{R}^n est un système de la forme*

$$\begin{cases} \frac{dx_1}{dt}(t) = P_1(x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t)), \\ \frac{dx_2}{dt}(t) = P_2(x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t)), \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \frac{dx_n}{dt}(t) = P_n(x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t)), \end{cases} \quad (1.3)$$

où P_1, P_2, \dots et P_n sont des polynômes à coefficients réels.

- ▶ Si $d = \max(\deg P_1, \deg P_2, \dots, \deg P_n)$, alors le système (1.3) est dit de degré d .
- ▶ Si P_1, P_2, \dots, P_n ne dépendent pas explicitement de t , alors le système (1.3) est dit autonome.

1.3 Solution d'un système différentiel

On appelle solution du système (1.3) toute application dérivable

$$x : I \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$$

$$t \mapsto x(t) = (x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t)),$$

où I est un intervalle non vide tel que, pour tout $t \in I$, $(x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t))$ satisfait le système (1.3).

1.4 Point d'équilibre et linéarisation

Les points d'équilibre jouent un rôle important dans l'étude des systèmes différentiels non linéaires. Ceci nous permet de connaître le comportement des solutions au voisinage de ces points.

La plupart des systèmes qui modélisent les phénomènes naturels sont non linéaires. Pour étudier le comportement des trajectoires de ces systèmes, au voisinage d'un point d'équilibre x_0 , on étudie les systèmes linéarisés associés.

1.4.1 Point d'équilibre

Définition 1.4.1 *Considérons le système différentiel*

$$\dot{x} = f(x). \quad (1.4)$$

Un point x_0 est dit point d'équilibre du système (1.4) si

$$f(x_0) = 0.$$

1.4.2 Linéarisation

Définition 1.4.2 *Considérons le système différentiel non linéaire (1.4). Soit x_0 un point d'équilibre du système (1.4).*

Le système

$$\dot{x} = Ax, \quad (1.5)$$

où

$$A = Df(x_0) = \frac{\partial f_i}{\partial x_j}(x_0), \quad 1 \leq i, j \leq n, \quad (1.6)$$

est dit système linéarisé du système (1.4) au point x_0 .

A est appelée matrice jacobienne associée au système (1.4) évaluée en x_0 .

Exemple 2 *Considérons le système*

$$\begin{cases} \dot{x} = x^3 - 4y, \\ \dot{y} = 5x + 7y^2. \end{cases} \quad (1.7)$$

$X_0 = (0, 0)$ *est un point d'équilibre du système (1.7).*

La matrice jacobienne associée au système (1.7) calculée en $(0, 0)$ est donnée par

$$Df(0, 0) = \begin{pmatrix} 0 & -4 \\ 5 & 0 \end{pmatrix}.$$

Ainsi, le système linéarisé du système (1.7) est

$$\begin{cases} \dot{x} = -4y, \\ \dot{y} = 5x. \end{cases} \quad (1.8)$$

Définition 1.4.3 *Le point d'équilibre x_0 du système (1.4) est dit hyperbolique si aucune des valeurs propres de la matrice jacobienne $A = Df(x_0)$ n'a de partie réelle nulle.*

1.4.3 Classification des points d'équilibre

Définition 1.4.4 *Considérons le système différentiel (1.4) avec $x \in \mathbb{R}^2$. Soit A la matrice jacobienne calculée au point $X_0 = (0, 0)$, et soient λ_1 et λ_2 les valeurs propres de cette matrice. Nous distinguons les différents cas en fonction de ces valeurs propres :*

1. *Si λ_1 et λ_2 sont réelles, non nulles et de signe différent, alors le point d'équilibre X_0 est un point selle. Il est toujours instable (voir Fig. 1.1).*

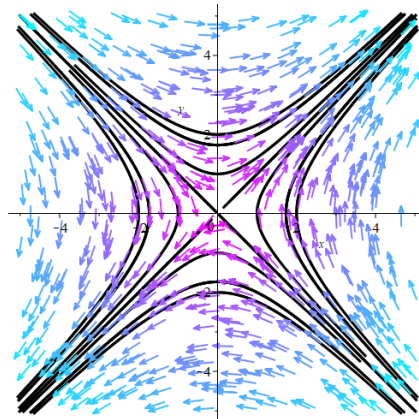


FIGURE 1.1: $(0, 0)$ est un point selle.

2. Si λ_1 et λ_2 sont réels et de même signe, nous avons trois cas :
- ❖ Si $\lambda_1 < \lambda_2 < 0$, alors X_0 est un nœud stable (voir Fig. 1.2).
 - ❖ Si $0 < \lambda_1 < \lambda_2$, alors X_0 est un nœud instable (voir Fig. 1.3).
 - ❖ Si $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda$, nous avons deux cas :
 - * Si A est diagonalisable, alors X_0 est un nœud propre (NP). Il est stable si $\lambda < 0$ et instable si $\lambda > 0$ (voir Fig. 1.4 et Fig. 1.5 respectivement).
 - * Si A n'est pas diagonalisable, alors X_0 est un type exceptionnel de nœud. Il est nœud exceptionnel stable (NES) si $\lambda < 0$ et nœud exceptionnel instable (NEI) si $\lambda > 0$ (voir Fig. 1.6 et Fig. 1.7 respectivement).

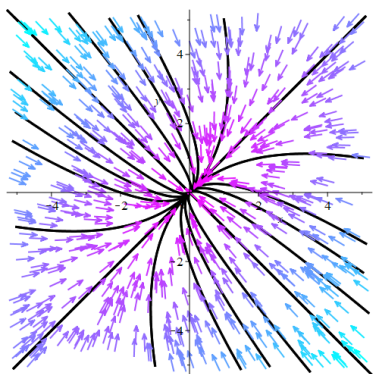


FIGURE 1.2: $(0,0)$ est un nœud stable.

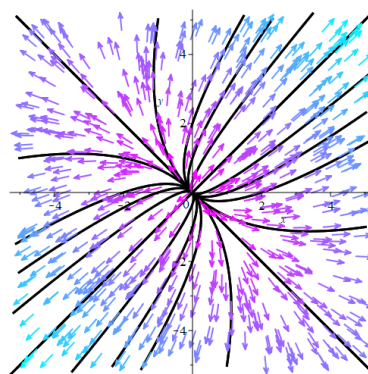


FIGURE 1.3: $(0,0)$ est un nœud instable.

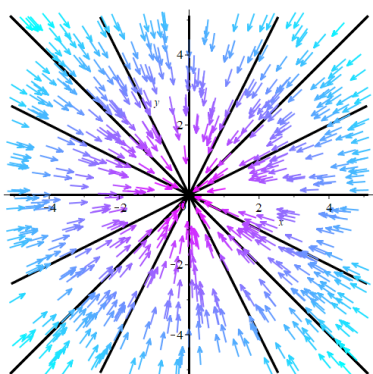


FIGURE 1.4: $(0,0)$ est un NP stable.

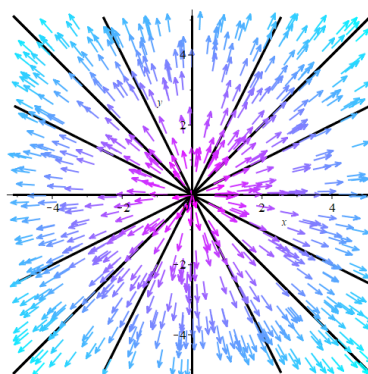


FIGURE 1.5: $(0,0)$ est un NP instable.

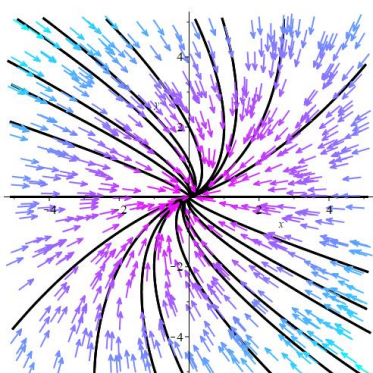


FIGURE 1.6: $(0,0)$ est un NES.

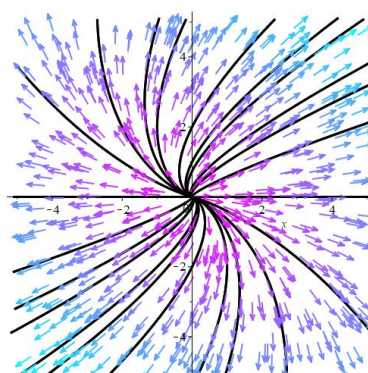


FIGURE 1.7: $(0,0)$ est un NEI.

3. Si λ_1 et λ_2 sont conjugués complexes avec une partie imaginaire non nulle, alors X_0 est un foyer. Il est stable si $\text{Re}(\lambda_{1,2}) < 0$ et instable si $\text{Re}(\lambda_{1,2}) > 0$ (voir Fig. 1.8 et Fig. 1.9 respectivement).

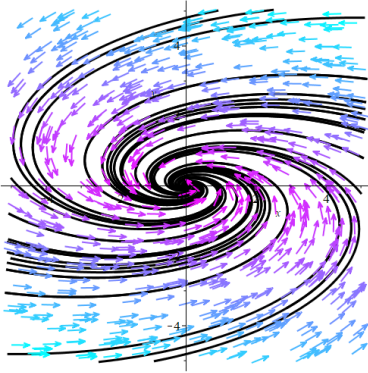


FIGURE 1.8: $(0,0)$ est un foyer stable.

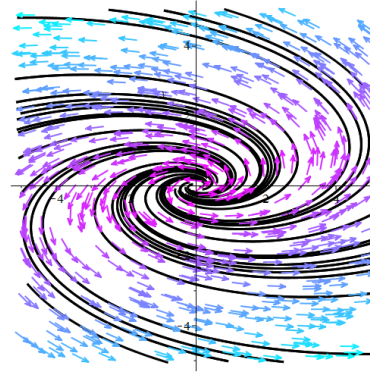


FIGURE 1.9: $(0,0)$ est un foyer instable.

4. Si λ_1 et λ_2 sont purement imaginaires, alors X_0 est un centre. Il est stable mais il n'est pas asymptotiquement stable (voir Fig. 1.10).

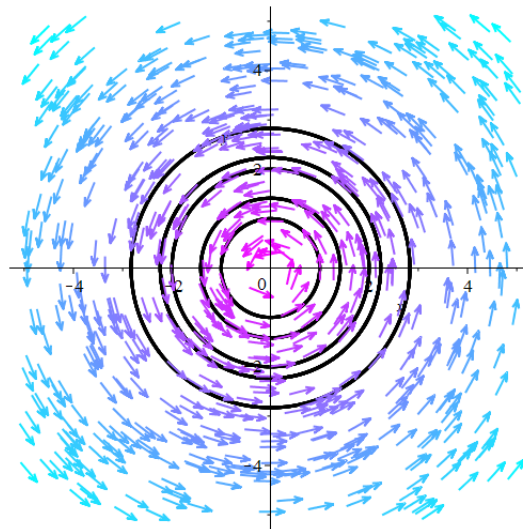


FIGURE 1.10: $(0,0)$ est un centre.

1.5 Stabilité des points d'équilibre

Un système non linéaire peut avoir plusieurs points d'équilibre. Ces points peuvent être stables ou instables.

Considérons le système

$$\dot{x} = f(t, x), \quad x \in \mathbb{R}^n, t \in \mathbb{R}. \quad (1.9)$$

Soit p un point d'équilibre du système (1.9) et $\phi(t)$ la solution de ce système.

Définition 1.5.1 On dit que

- i) p est stable si et seulement si

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, \|\phi(t_0) - p\| < \delta \Rightarrow \|\phi(t) - p\| < \varepsilon, \forall t \geq t_0.$$

- ii) p est asymptotiquement stable si et seulement si p est stable et s'il existe un voisinage de p tel que pour tout x dans ce voisinage

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \phi(t) = p.$$

On peut étudier la stabilité du système (1.9) en fonction des valeurs propres de la matrice jacobienne $Df(p)$, en utilisant le théorème suivant.

Théorème 1.5.2 Soit p un point d'équilibre du système (1.9).

- Si toutes les valeurs propres de la matrice jacobienne $Df(p)$ ont des parties réelles négatives, alors le point d'équilibre p est asymptotiquement stable.
- S'il existe au moins une valeur propre de $Df(p)$ avec une partie réelle positive, alors le point d'équilibre p est instable.
- Si $Df(p)$ a des valeurs propres avec des parties réelles négatives et d'autres avec des parties réelles nulles, alors on ne peut rien conclure sur la stabilité du point d'équilibre p .

1.6 Orbites périodiques et cycles limites

1.6.1 Orbites périodiques

Définition 1.6.1 Une trajectoire $\phi(t, x)$ du système (1.3) est appelée orbite périodique s'il existe un nombre $T > 0$ tel que

$$\phi(t + T, x) = \phi(t, x), \forall x \in \mathbb{R}^n. \quad (1.10)$$

Le plus petit réel T satisfaisant (1.10) est appelé la période.

1.6.2 Cycles limites

Définition 1.6.2 Un cycle limite est une orbite périodique fermée isolée dans un ensemble d'orbites périodiques.

1.7 Stabilité des cycles limites

Théorème 1.7.1 Soit C la trajectoire correspondant au cycle limite, et soient toutes les trajectoires intérieures et extérieures proches de C qui s'enroulent en spirale autour de C pour $t \rightarrow +\infty$ ou $t \rightarrow -\infty$.

- Le cycle limite est dit stable si toutes les trajectoires voisines sont attirées vers C .
- Le cycle limite est dit instable si toutes les trajectoires voisines au moins d'un côté sont repoussées loin de C .

Exemple 3 Considérons le système

$$\begin{cases} \dot{x} = \frac{1}{3}x - 8y - 3x(x^2 + y^2), \\ \dot{y} = 8x + \frac{1}{3}y - 3y(x^2 + y^2). \end{cases} \quad (1.11)$$

En coordonnées polaires $x = r \cos(\theta)$, $y = r \sin(\theta)$ avec $r > 0$, le système (1.11) devient

$$\begin{cases} \dot{r} &= \frac{1}{3}r(1 - 9r^2), \\ \dot{\theta} &= 8. \end{cases} \quad (1.12)$$

Nous obtenons

$$f(r) = \frac{dr}{d\theta} = \frac{1}{24}r(1 - 9r^2).$$

Donc

$$\dot{r} = 0 \Rightarrow r = 0 \quad \text{ou} \quad r = \pm \frac{1}{3}.$$

Comme $r > 0$, nous n'acceptons que la racine positive $r = \frac{1}{3}$. Alors, la solution périodique est écrite sous la forme suivante

$$(x(t), y(t)) = \left(\frac{1}{3} \cos(8t + \theta_0), \frac{1}{3} \sin(8t + \theta_0) \right),$$

avec $\theta(0) = \theta_0$.

Dans le plan de phase, il n'y a qu'un seul cycle limite $x^2 + y^2 = \frac{1}{9}$ dont l'amplitude $r = \frac{1}{3}$ (voir Fig. 1.11).

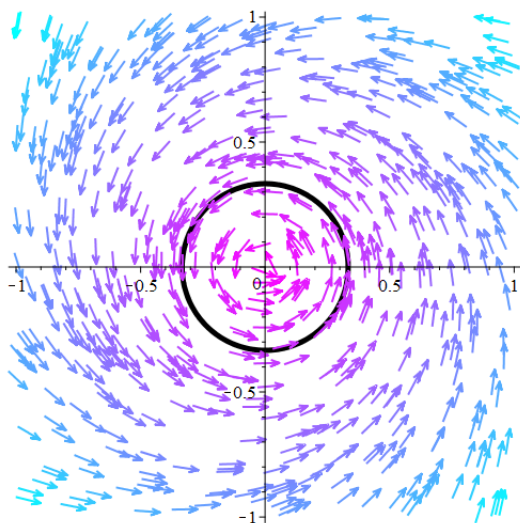


FIGURE 1.11: Cycle limite du système (1.11).

1.8 Existence des cycles limites

L'étude de l'existence des cycles limites joue un rôle important dans l'étude du comportement des trajectoires des systèmes différentiels non linéaires.

Théorème 1.8.1 (Poincaré-Bendixon)

Considérons le système planaire

$$\begin{cases} \dot{x} &= f(x, y), \\ \dot{y} &= g(x, y). \end{cases} \quad (1.13)$$

Supposons que f et g sont deux fonctions de classe C^1 sur un sous-ensemble ouvert de \mathbb{R}^2 noté E , le système (1.13) possède une orbite γ telle que l'orbite positive $\gamma_+(p) = \Phi(p, t), t \geq 0$ passant par le point p est contenue dans un sous-ensemble compact F de E . Alors nous sommes dans l'un des trois cas suivants :

- * $\gamma_+(p)$ tend vers un point d'équilibre.
- * $\gamma_+(p)$ tend vers un cycle limite.
- * $\gamma_+(p)$ est un cycle limite.

Si F ne contient pas de points d'équilibre alors il existe un cycle limite du système (1.13).

Théorème 1.8.2 (Critère de Bendixon)

Considérons le système

$$\begin{cases} \dot{x} = f(x, y), \\ \dot{y} = g(x, y), \end{cases}$$

et soit $F = (f, g)^T \in C^1(E)$ où E est une région simplement connexe dans \mathbb{R}^2 . Si la divergence du champ de vecteurs F (notée ∇F) n'est pas identiquement nulle et ne change pas de signe dans E , alors ce système n'a pas d'orbite fermée entièrement contenue dans E .

Exemple 4 Considérons le système différentiel planaire suivant

$$\begin{cases} \dot{x} = 4xy + 7y^8 + 6x, \\ \dot{y} = 2x^2y^3 - 2y^2 + x^3. \end{cases}$$

Soit $F = (4xy + 7y^8 + 6x, 2x^2y^3 - 2y^2 + x^3)^T$.

Nous calculons la divergence du champ de vecteurs F , nous obtenons

$$\begin{aligned} \operatorname{div} F &= \nabla F = \frac{\partial}{\partial x}(4xy + 7y^8 + 6x) + \frac{\partial}{\partial y}(2x^2y^3 - 2y^2 + x^3) \\ &= (4y + 6) + (6x^2y^2 - 4y) = 6(x^2y^2 + 1) > 0. \end{aligned}$$

Ainsi, selon le **Critère de Bendixon**, ce système n'a pas de cycle limite dans \mathbb{R}^2 .

1.9 Ensemble isochrone

L'ensemble isochrone est un ensemble formé uniquement par des solutions périodiques, qui ont la même période.

1.10 Bifurcation

Définition 1.10.1 On dit qu'un système d'équations différentielles

$$\dot{x} = f(x(t), \mu), \tag{1.14}$$

a une bifurcation pour la valeur $\mu = \mu_0$, s'il y a un changement dans la structure des trajectoires lorsque le paramètre μ passe la valeur μ_0 . Autrement dit, il y a un changement dans le nombre et/ou la stabilité des points d'équilibre du système à la valeur de bifurcation (voir [54], p. 173).

1.11 Bifurcation de Hopf

Théorème 1.11.1 *Considérons le système différentiel planaire*

$$\begin{cases} \dot{x} = f_\mu(x, y), \\ \dot{y} = g_\mu(x, y), \end{cases} \quad (1.15)$$

où μ est un paramètre. Supposons que $(x, y) = (x_0, y_0)$ soit un point d'équilibre du système (1.15) qui dépend de μ .

Soit $\lambda(\mu) = \alpha(\mu) + i\beta(\mu)$ et $\overline{\lambda(\mu)} = \alpha(\mu) - i\beta(\mu)$ les valeurs propres du système linéarisé dans le voisinage de (x_0, y_0) .

Supposons en outre que pour une certaine valeur de $\mu = \mu_0$, les conditions suivantes soient satisfaites :

1. $\alpha(\mu_0) = 0$, $\beta(\mu_0) = w \neq 0$ où $\text{sgn}(w) = \text{sgn}\left(\left.\frac{\partial g_\mu}{\partial x}\right|_{\mu=\mu_0}(x_0, y_0)\right)$,
2. $\left.\frac{d\alpha(\mu)}{d\mu}\right|_{\mu=\mu_0} = d \neq 0$,
3. $a \neq 0$ où

$$a = \frac{1}{16}(f_{xxx} + f_{xyy} + g_{xxy} + g_{yyx}) + \frac{1}{16w}(f_{xy}(f_{xx} + f_{yy}) - g_{xy}(g_{xx} + g_{yy}) - f_{xx}g_{xx} + f_{yy}g_{yy}),$$

avec $f_{xy} = \left.\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}\right|_{\mu=\mu_0}(x_0, y_0)$, etc.

Alors, une orbite périodique bifurque du point d'équilibre pour $\mu > \mu_0$ si $ad < 0$ ou pour $\mu < \mu_0$ si $ad > 0$.

Le point d'équilibre (x_0, y_0) est stable pour $\mu > \mu_0$ (resp. pour $\mu < \mu_0$) et un point d'équilibre instable pour $\mu < \mu_0$ (resp. $\mu > \mu_0$) si $d < 0$ (resp. $d > 0$).

L'orbite périodique est stable (resp. instable) si le point d'équilibre est instable (resp. stable).

L'amplitude des orbites périodiques est égale à $\sqrt{|\mu - \mu_0|}$ tandis que leur période est $T = 2\pi/|w|$ lorsque $\mu \rightarrow \mu_0$.

La bifurcation est dite supercritique si l'orbite périodique est stable et sous-critique si l'orbite périodique est instable.

Exemple 5 *Considérons ce système différentiel du premier ordre*

$$\begin{cases} \dot{x} = \mu x - y + x^2, \\ \dot{y} = x + \mu y + x^2. \end{cases} \quad (1.16)$$

$(0, 0)$ est un point d'équilibre du système (1.16).

Les valeurs propres de la matrice jacobienne du système linéarisé calculées dans le voisinage de $(0, 0)$ sont $\lambda(\mu) = \mu + i$, $\overline{\lambda(\mu)} = \mu - i$.

Le système présente une bifurcation de Hopf pour $\mu_0 = 0$. Nous avons $w = 1$, $d = 1$ et $a = -\frac{1}{4}$.

Le point d'équilibre $(0, 0)$ est instable pour $\mu > 0$ (stable pour $\mu < 0$), donc la bifurcation est supercritique et il existe une orbite périodique isolée stable (cycle limite) si $\mu > 0$ pour chaque μ suffisamment petit (voir Fig. 1.12 pour $\mu = 10^{-3}$).

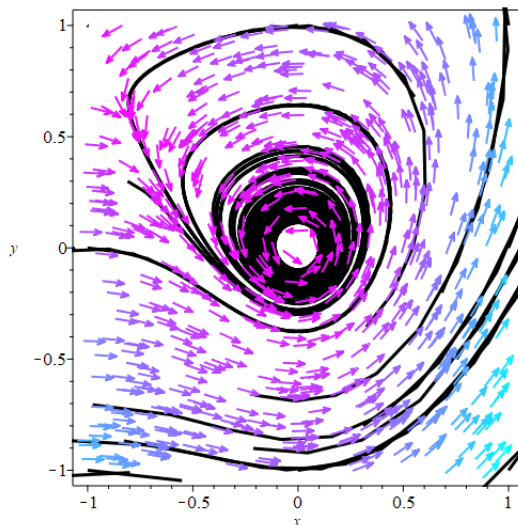


FIGURE 1.12: Portraits de phase du système (1.16).

1.12 Bifurcation zéro-Hopf

Définition 1.12.1 Le point d'équilibre d'un système différentiel donné, de dimension trois, est appelé point d'équilibre zéro-Hopf si la matrice jacobienne possède une valeur propre nulle et une paire de valeurs propres purement imaginaires. Ce type de bifurcation est analysé en profondeur par de nombreux auteurs, voir par exemple **Guckenheimer** et **Holmes** dans [25] et les références qui y sont citées.

Exemple 6 Considérons dans \mathbb{R}^3 le système différentiel suivant

$$\begin{cases} \dot{x} = y \\ \dot{y} = z \\ \dot{z} = -cx + ay + bz \end{cases}$$

Le point d'équilibre de ce système est $(0, 0, 0)$.

La matrice jacobienne associée à ce système au point $(0, 0, 0)$ est donnée par

$$J = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -c & a & b \end{pmatrix}$$

Le polynôme caractéristique de ce système est donné par

$$P(\lambda) = \det(\lambda I - J) = \lambda^3 - b\lambda^2 + a\lambda + c$$

En imposant que le polynôme caractéristique soit $p(\lambda) = \lambda(\lambda^2 + \omega^2)$ avec $\omega \neq 0$, c'est-à-dire en imposant que les valeurs propres au point d'équilibre $(0, 0, 0)$ soient 0 , ωi et $-\omega i$ avec $\omega \neq 0$,

et par conséquent que le point d'équilibre $(0, 0, 0)$ soit un équilibre zéro-Hopf, nous obtenons le système

$$\begin{cases} b = 0 \\ a = \omega^2 \\ c = 0 \end{cases}$$

Autrement dit, pour que le point d'équilibre $(0, 0, 0)$ soit un équilibre zéro-Hopf, il faut que $b = c = 0$ et $a > 0$.

Systemes de Lotka-Volterra

2.1 Modèle prédateurs-proies de Lotka-Volterra

On cherche à modéliser l'évolution de deux espèces, une population de proies, comprenant $x(t)$ individus, et une population de prédateurs, comprenant $y(t)$ individus.

Les proies vivent dans un milieu riche en nourriture. Leur nombre $x(t)$ s'accroît donc automatiquement. L'accroissement est proportionnel au nombre d'individus. (Chaque couple d'individus engendre un certain nombre de « petits » à intervalles de temps réguliers, par exemple chaque année.) L'accroissement sera donc $ax(t)$ avec $a > 0$. Cependant les proies sont dévorées par les prédateurs. La diminution du nombre de proies est proportionnelle au nombre de rencontres entre une proie et un prédateur. La diminution est donc $bx(t)y(t)$ avec $b > 0$. Finalement, L'évolution du nombre de proies est donnée par l'équation $\dot{x} = ax(t) - bx(t)y(t)$.

Les prédateurs sont incapables de se nourrir directement dans le milieu. Leur nombre $y(t)$ diminue donc automatiquement. La diminution est proportionnelle au nombre d'individus. (Un certain pourcentage de la population meurt de faim à intervalles de temps réguliers.) La diminution sera donc $cy(t)$ avec $c > 0$. Cependant les prédateurs se nourrissent de proies. L'accroissement de leur population est proportionnel au nombre de rencontres entre un prédateur et une proie. L'accroissement sera donc $dx(t)y(t)$ avec $d > 0$. Finalement l'évolution du nombre de prédateurs est donnée par l'équation $\dot{y} = -cy(t) + dx(t)y(t)$.

Au total, le modèle prédateur-proies de Lotka-Volterra correspond au système différentiel suivant

$$\begin{aligned} \dot{x} &= x(a - by), \\ \dot{y} &= y(-c + dx), \end{aligned} \tag{2.1}$$

Volterra introduisit ce modèle en 1926 pour expliquer l'évolution périodique de deux espèces de poissons de la mer adriatique. Des équations de la même forme avaient été introduites en 1922 par Lotka en cinétique chimique.

2.1.1 Nature des points d'équilibre

Les points d'équilibre du système (2.1) sont $(0, 0)$ et $(\frac{c}{d}, \frac{a}{b})$. La matrice jacobienne associée au système (2.1) calculée en $(0; 0)$ est donnée par

$$Df(0, 0) = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & -c \end{pmatrix},$$

les valeurs propres de cette matrice sont $\lambda_1 = a > 0$ et $\lambda_2 = -c < 0$. Donc $(0, 0)$ est un point selle instable.

Nature du point d'équilibre $\left(\frac{c}{d}, \frac{a}{b}\right)$

Posons $x = \frac{c}{d} + \xi$, $y = \frac{a}{b} + \eta$ avec ξ et η étant de petits paramètres strictement positifs.

On a

$$\frac{dx}{dy} = \frac{x(a - by)}{y(-c + dx)} = \frac{ax - bxy}{-cy + dxy},$$

d'où

$$(-cy + dxy)dx = (ax - bxy)dy.$$

En divisant chaque côté de l'égalité par xy , on obtient

$$\left(-\frac{c}{x} + d\right) dx = \left(\frac{a}{y} - b\right) dy.$$

D'où l'intégrale première

$$a \ln y + c \ln x - by - dx = C.$$

Maintenant, en remplaçant $x = \frac{c}{d} + \xi$ et $y = \frac{a}{b} + \eta$ dans la solution, on obtient

$$a \ln \left(\frac{a}{b} + \eta\right) + c \ln \left(\frac{c}{d} + \xi\right) - b \left(\frac{a}{b} + \eta\right) - d \left(\frac{c}{d} + \xi\right) = C. \quad (2.2)$$

On sait par le développement de Taylor que

$$\ln(1 + x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} \cdot x^n}{n} = x - \frac{x^2}{2} + \dots + \frac{(-1)^{n+1} \cdot x^n}{n} + \dots$$

pour $|x| < 1$.

D'où

$$\begin{aligned} \ln \left(\frac{a}{b} + \eta\right) &= \ln \left(\frac{a}{b} \left(1 + \frac{b}{a}\eta\right)\right) \\ &= \ln \left(\frac{a}{b}\right) + \ln \left(1 + \frac{b}{a}\eta\right) \\ &= \ln \left(\frac{a}{b}\right) + \frac{b}{a}\eta - \frac{b^2\eta^2}{2a^2} + \dots, \end{aligned} \quad (2.3)$$

et

$$\begin{aligned} \ln \left(\frac{c}{d} + \xi\right) &= \ln \left(\frac{c}{d} \left(1 + \frac{d}{c}\xi\right)\right) \\ &= \ln \left(\frac{c}{d}\right) + \ln \left(1 + \frac{d}{c}\xi\right) \\ &= \ln \left(\frac{c}{d}\right) + \frac{d}{c}\xi - \frac{d^2\xi^2}{2c^2} + \dots. \end{aligned} \quad (2.4)$$

Maintenant, en remplaçant (2.3) et (2.4) dans (2.2), on obtient

$$a \ln \left(\frac{a}{b}\right) + b\eta - \frac{b^2\eta^2}{2a} + c \ln \left(\frac{c}{d}\right) + d\xi - \frac{d^2\xi^2}{2c} - a - b\eta - c - d\xi = C,$$

après simplification des calculs, nous trouvons

$$\frac{b^2\eta^2}{2a} + \frac{d^2\xi^2}{2c} = a \ln \left(\frac{a}{b}\right) + c \ln \left(\frac{c}{d}\right) - (a + c) - C = K.$$

Les courbes qui entourent le point d'équilibre $\left(\frac{c}{d}, \frac{a}{b}\right)$ sont des ellipses. Donc $\left(\frac{c}{d}, \frac{a}{b}\right)$ est un centre.

Exemple 7 *Étude du système*

$$\begin{aligned}\dot{x} &= x(2 - y) \\ \dot{y} &= y\left(-\frac{1}{4} + x\right).\end{aligned}$$

Les points d'équilibre de ce système sont $(0, 0)$ et $\left(\frac{1}{4}, 2\right)$. $(0, 0)$ est une selle et $\left(\frac{1}{4}, 2\right)$ est un centre. Les orbites sont illustrées par les deux portraits de phase ci-joints.

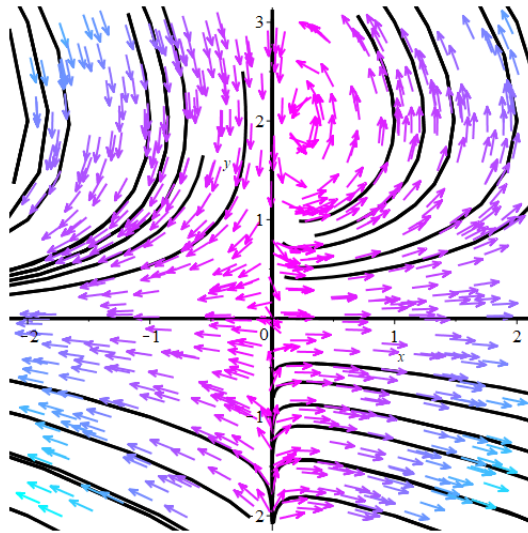


FIGURE 2.1: $(0, 0)$ est un point selle.

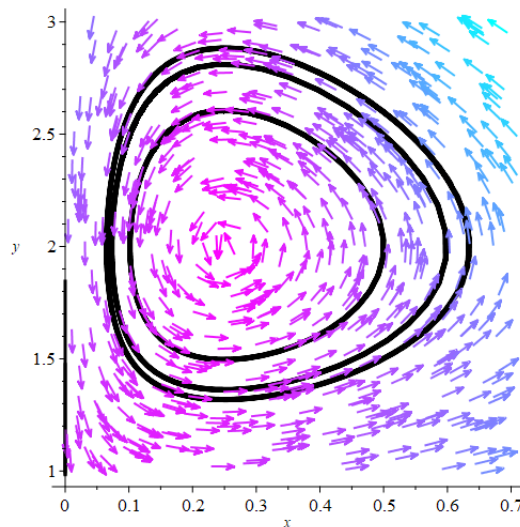


FIGURE 2.2: $\left(\frac{1}{4}, 2\right)$ est un centre.

2.2 Espèces en compétition

Supposons qu'il existe deux espèces en compétition l'une avec l'autre dans un environnement où l'approvisionnement alimentaire commun est limité. Par exemple, les lions de mer et les manchots, les écureuils rouges et gris, ainsi que les fourmis et les termites sont toutes des espèces qui entrent dans cette catégorie. Il y a deux types de résultats particuliers qui sont souvent observés dans le monde réel. Dans le premier cas, il y a coexistence, où les deux espèces vivent en harmonie. (Dans la nature, c'est le résultat le plus probable ; sinon, l'une des espèces serait éteinte.) Dans le deuxième cas, il y a exclusion mutuelle, où l'une des espèces s'éteint. (Par exemple, les écureuils gris américains importés au Royaume-Uni causent l'extinction des plus petits écureuils rouges indigènes.)

La coexistence et l'exclusion mutuelle peuvent être observées en traçant des courbes de solution sur un diagramme de phase. Considérons le modèle général suivant pour deux espèces concurrentes.

$$\begin{aligned} \dot{x} &= x(\beta - \delta x - \gamma y), \\ \dot{y} &= y(b - cx - dy). \end{aligned} \tag{2.5}$$

où $\beta, \delta, \gamma, a, b$ et c sont toutes des constantes positives, avec $x(t)$ et $y(t)$ toutes deux strictement positives représentant les populations des deux espèces mesurées en dizaines ou centaines de milliers.

Il y a quatre points d'équilibre

$$O = (0, 0), P = (0, b), Q = \left(\frac{\beta}{\delta}, 0\right), \text{ et } R = \left(\frac{\gamma b - \beta d}{\gamma c - \delta d}, \frac{\beta c - \delta b}{\gamma c - \delta d}\right).$$

Supposons que $C_1 = \gamma c - \delta d$, $C_2 = \gamma b - \beta d$, et $C_3 = \beta c - \delta b$. Pour que le point d'équilibre se trouve dans le premier quadrant, l'une des conditions suivantes doit être remplie

- (i) C_1, C_2 et C_3 sont tous négatifs, ou
- (ii) C_1, C_2 et C_3 sont tous positifs.

La matrice jacobienne associée au système (2.5) est donnée par

$$J = \begin{pmatrix} \beta - 2\delta x - \gamma y & -\gamma x \\ -cy & b - 2dy - cx \end{pmatrix}.$$

Pour le point d'équilibre O ,

$$J_O = \begin{pmatrix} \beta & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix}.$$

Pour le point d'équilibre P ,

$$J_P = \begin{pmatrix} \beta - \frac{\gamma b}{d} & 0 \\ -\frac{bc}{d} & -b \end{pmatrix}.$$

Pour le point d'équilibre Q ,

$$J_Q = \begin{pmatrix} -\beta & -\frac{\gamma\beta}{\delta} \\ 0 & b - \frac{\beta c}{\delta} \end{pmatrix}.$$

Enfin, pour le point d'équilibre R ,

$$J_R = \frac{1}{C_1} \begin{pmatrix} \delta C_2 & \gamma C_2 \\ c C_3 & d C_3 \end{pmatrix}.$$

Considérons d'abord le cas (i). Les points d'équilibre sont tous simples, et il n'est pas difficile de montrer que O est un nœud instable, P et Q sont des cols, et pour certaines valeurs des paramètres, R est un point d'équilibre stable. Un portrait de phase est tracé dans la Figure 2.3(a), où huit des innombrables courbes solutions sont tracées. Chaque trajectoire est tracée numériquement pour des pas de temps positifs et négatifs ; de cette manière, les points d'équilibre sont facilement identifiés dans le plan de phase. Pour les valeurs des paramètres choisies ici, les deux espèces coexistent et les populations se stabilisent à des valeurs constantes après de longues périodes. Les flèches dans la Figure 2.3(a) montrent le champ vectoriel et définissent la direction des trajectoires pour le système (2.5). La pente de chaque flèche est donnée par $\frac{dy}{dx}$ au point, et la direction des flèches est déterminée à partir de \dot{x} et \dot{y} . Il y a un nœud stable situé entièrement dans le premier quadrant à R , et les populations non nulles $x(t)$ et $y(t)$ tendent vers ce point d'équilibre avec le temps qui augmente, quel que soit le choix des populations initiales. Le domaine de stabilité pour le point d'équilibre R est donc $S_R = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x > 0, y > 0\}$. Considérons maintenant le cas (ii). Les points d'équilibre sont tous simples, et il n'est pas difficile de montrer que O est un nœud instable, P et Q sont des nœuds stables ou impropres, et R est un col. Un portrait de phase est montré dans la Figure 2.3(b), où neuf des innombrables courbes solutions sont tracées. Encore une fois, les trajectoires sont tracées pour des itérations de temps positifs et négatifs. Dans ce cas, l'une des espèces s'éteint.

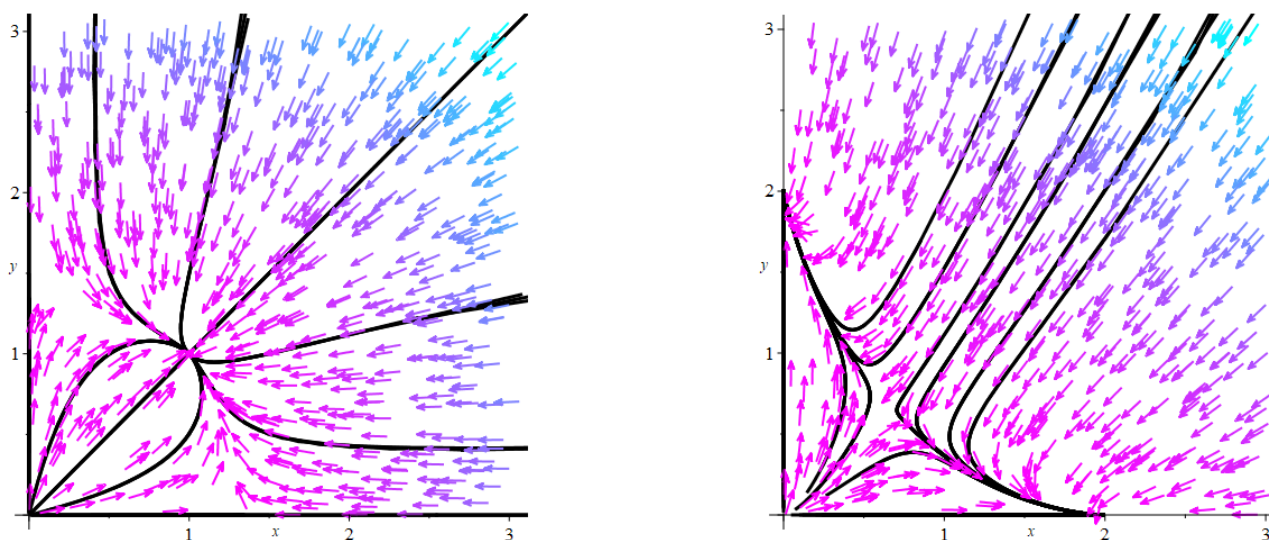
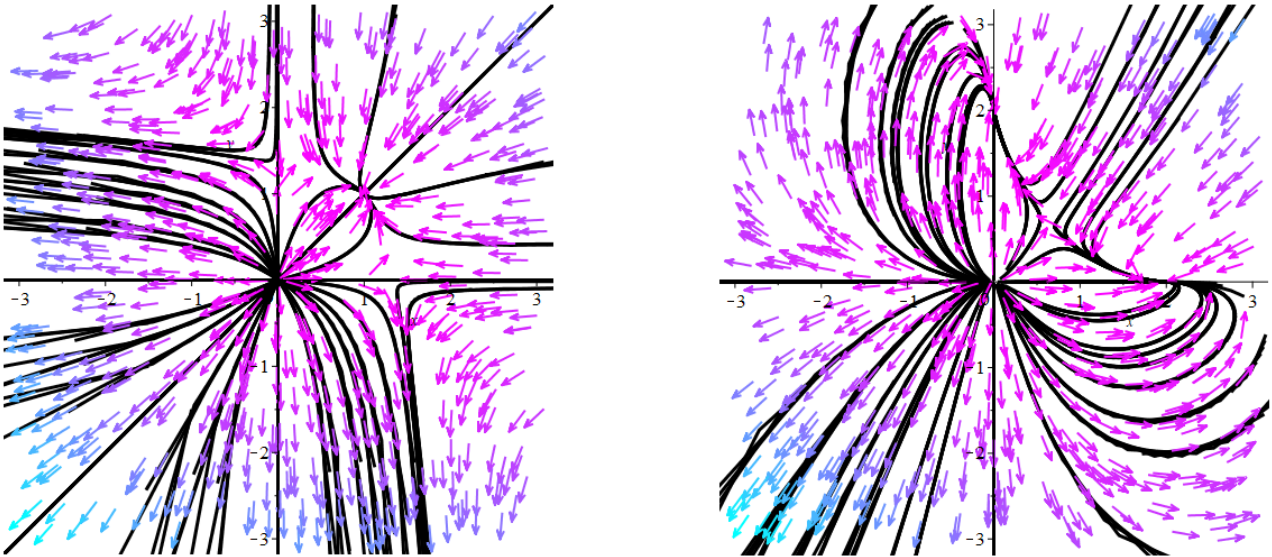


FIGURE 2.3: (a)

(b)

(a) Un portrait de phase possible montrant la coexistence et (b) un portrait de phase possible illustrant l'exclusion mutuelle. Notez que les axes sont invariants dans les deux cas.

Si on considère que x et y sont quelconques (pas forcément positifs), on aura le portrait de phase suivant

FIGURE 2.4: $x \in \mathbb{R}$ et $y \in \mathbb{R}$

Le système associé à la figure 2.3(a) est le suivant

$$\begin{aligned}\dot{x} &= x(4 - 3x - y), \\ \dot{y} &= y(4 - x - 3y).\end{aligned}$$

Les quatre points d'équilibre de ce système sont

$$O = (0, 0), P = \left(0, \frac{4}{3}\right), Q = \left(\frac{4}{3}, 0\right) \text{ et } R = (1, 1).$$

Ce système vérifie la condition (i) car $C_1 = C_2 = C_3 = -8$.

Le système associé à la figure 2.3(b) est le suivant

$$\begin{aligned}\dot{x} &= x(2 - x - 2y), \\ \dot{y} &= y(3 - 3x - 1.5y).\end{aligned}$$

Les quatre points d'équilibre de ce système sont

$$O = (0, 0), P = (0, 2), Q = (2, 0) \text{ et } R = \left(\frac{2}{3}, \frac{2}{3}\right).$$

Ce système vérifie la condition (ii) car $C_1 = 4$, $C_2 = 2$ et $C_3 = 3$.

Dans la Figure 2.3(b), le point d'équilibre situé entièrement dans le premier quadrant est un point selle ou col, qui est instable. Le comportement à long terme du système est divisé le long de la diagonale dans le premier quadrant. Les trajectoires commençant à droite de la diagonale tendront vers le point d'équilibre $Q = (2, 0)$, ce qui implique que l'espèce y s'éteindra. Les trajectoires commençant à gauche de la diagonale tendront vers le point d'équilibre $P = (0, 2)$, ce qui signifie que l'espèce x s'éteindra. Numériquement, les trajectoires situées sur la variété stable du point selle dans le premier quadrant tendront vers le point d'équilibre R . Cependant, dans le monde réel, les populations ne peuvent pas rester exactement sur la variété stable, et les trajectoires seront déviées de ce point d'équilibre, entraînant l'extinction d'une des espèces. Le domaine de stabilité pour le point d'équilibre $P = (0, 2)$ est donné par $S_P = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x > 0, y > 0, y > x\}$. Le domaine de stabilité pour le point d'équilibre $Q = (2, 0)$ est donné par $S_Q = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x > 0, y > 0, y < x\}$.

Plus généralement, on étudie les systèmes de Lotka-Volterra de n espèces

$$\dot{x}_i = x_i \left(r_i + \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j \right), \quad i = 1, \dots, n.$$

où x_i désigne la densité de la i -ème espèce, r_i est son taux de croissance intrinsèque (ou de décroissance), et la matrice $A = (a_{ij})$ est appelée matrice d'interaction.

Par exemple, le système de Lotka-Volterra de 3 espèces est donné par

$$\begin{aligned}\dot{x} &= x(r_1 - a_{11}x + a_{12}y - a_{13}z), \\ \dot{y} &= y(r_2 - a_{21}x - a_{22}y - a_{23}z), \\ \dot{z} &= z(r_3 + a_{31}x - a_{32}y - a_{33}z).\end{aligned}$$

Voici des photographies de Lotka et Volterra



Alfred James Lotka (1880 - 1949)



Vito Volterra (1860 - 1940)

Bifurcation du cycle limite à partir d'un équilibre zéro-Hopf pour une classe de systèmes de Kolmogorov tridimensionnels

3.1 Introduction et énoncés des principaux résultats

Comme d'habitude, un cycle limite d'un système différentiel est une orbite périodique isolée dans l'ensemble de toutes les orbites périodiques du système. Un point d'équilibre zéro-Hopf p d'un système différentiel autonome tridimensionnel dans \mathbb{R}^3 est un équilibre tel que les valeurs propres de la partie linéaire du système en p sont 0 et $\pm\omega_i$ avec $\omega \neq 0$. Pour un point d'équilibre p d'un système différentiel autonome tridimensionnel dans \mathbb{R}^3 , tel que les valeurs propres de la partie linéaire du système en p sont ρ et $\pm\omega_i$ avec $\rho\omega \neq 0$, il existe une théorie générale (voir par exemple les pages 175-180 de [32]) pour étudier les cycles limites qui peuvent bifurquer à partir de p en changeant légèrement les paramètres du système. Une telle théorie générale n'existe pas pour un équilibre zéro-Hopf. Mais la théorie de l'averaging fournit un algorithme pour résoudre ce problème, voir par exemple [23, 35]. Les systèmes de Kolmogorov [30] dans \mathbb{R}^3 sont de la forme

$$\begin{aligned} \dot{x} &= xP(x, y, z), \\ \dot{y} &= yQ(x, y, z), \\ \dot{z} &= zR(x, y, z), \end{aligned} \tag{3.1}$$

où P , Q et R sont des polynômes de degré supérieur à un. En fait, les systèmes de Kolmogorov sont une généralisation des systèmes de Lotka-Volterra [41, 55] qui sont les systèmes ci-dessus lorsque le degré des polynômes P , Q et R est égal à un. Les systèmes de Kolmogorov ont été étudiés intensivement car ils peuvent modéliser la dynamique de nombreux phénomènes naturels, voir par exemple [12, 15, 21, 27, 28, 29, 43, 44]. Dans l'article [18], nous avons étudié les orbites périodiques bifurquant à partir d'un équilibre de Hopf de systèmes de Kolmogorov polynomiaux bidimensionnels de degré arbitraire. Dans cet article, nous étudions d'abord les points d'équilibre zéro-Hopf des systèmes de Kolmogorov dans \mathbb{R}^3 de degré trois, et nous obtenons qu'il existe exactement huit familles de tels systèmes de Kolmogorov ayant des équilibres zéro-Hopf. Après avoir utilisé la théorie de moyennisation du premier ordre, nous prouvons qu'à partir de tels points d'équilibre, en déplaçant les paramètres du système, une ou deux orbites périodiques bifurquent. Enfin, nous fournissons également pour chacune de ces huit familles un exemple de cette bifurcation zéro-Hopf, nous traçons leurs cycles limites bifurqués, et nous étudions leur stabilité. Ce genre de résultats pour les systèmes de Lotka-Volterra dans \mathbb{R}^3 ont été étudiés dans [38].

Pour d'autres systèmes différentiels, la bifurcation zéro-Hopf a été étudiée par de nombreux auteurs, par exemple dans [22, 24, 25, 26, 32, 36, 46, 50]. Dans certains cas, l'existence d'une bifurcation zéro-Hopf peut impliquer une naissance locale du "chaos", voir par exemple les articles (cf. [2, 3, 13, 16, 50]).

Pour leurs applications, la dynamique des systèmes de Kolmogorov est principalement étudiée dans le premier octant positif. Soit (a, b, c) un point d'équilibre d'un système de Kolmogorov (3.1) avec toutes ses coordonnées positives. En effectuant la mise à l'échelle des variables $(x, y, z) \rightarrow (x/a, y/b, z/c)$, nous pouvons supposer sans perte de généralité que ce point d'équilibre est le point $(1, 1, 1)$. Ensuite, les systèmes de Kolmogorov généraux dans \mathbb{R}^3 de degré 3 ayant le point d'équilibre $(1, 1, 1)$ sont donnés par

$$\begin{aligned} \dot{x} &= x(a_1(x-1) + b_1(y-1) + c_1(z-1) + d_1(x-1)^2 + e_1(x-1)(y-1) + f_1(x-1)(z-1) + \\ &\quad g_1(y-1)^2 + h_1(y-1)(z-1) + k_1(z-1)^2), \\ \dot{y} &= y(a_2(x-1) + b_2(y-1) + c_2(z-1) + d_2(x-1)^2 + e_2(x-1)(y-1) + f_2(x-1)(z-1) + \\ &\quad g_2(y-1)^2 + h_2(y-1)(z-1) + k_2(z-1)^2), \\ \dot{z} &= z(a_3(x-1) + b_3(y-1) + c_3(z-1) + d_3(x-1)^2 + e_3(x-1)(y-1) + f_3(x-1)(z-1) + \\ &\quad g_3(y-1)^2 + h_3(y-1)(z-1) + k_3(z-1)^2). \end{aligned} \tag{3.2}$$

Notez que le système différentiel (3.2) dépend de 27 paramètres.

Dans la proposition suivante, nous caractérisons quand le point d'équilibre $(1, 1, 1)$ des systèmes de Kolmogorov (3.1) est un équilibre zéro-Hopf.

Proposition 1 *Il existe huit familles à m paramètres de systèmes de Kolmogorov (3.2) pour lesquelles le point d'équilibre $(1, 1, 1)$ est un équilibre zéro-Hopf. À savoir*

- (i) $a_1 = b_1 = b_2 = c_1 = c_3 = 0$, $b_3c_2 < 0$, pour cette famille $m = 22$;
- (ii) $a_1 = -b_2$, $c_1 = c_2 = c_3 = 0$, $a_2b_1 + b_2^2 < 0$, pour cette famille $m = 23$;
- (iii) $a_1 = b_1 = c_1 = 0$, $c_3 = -b_2$, $b_3c_2 + b_2^2 < 0$, pour cette famille $m = 23$;
- (iv) $a_1 = -c_3$, $b_1 = b_2 = b_3 = 0$, $a_3c_1 + c_3^2 < 0$, pour cette famille $m = 23$;
- (v) $a_1 = -c_3$, $a_2 = -\frac{c_2c_3}{c_1}$, $b_1 = b_2 = 0$, $a_3c_1 + b_3c_2 + c_3^2 < 0$, pour cette famille $m = 23$;
- (vi) $a_1 = -b_2 - c_3$, $b_3 = \frac{b_1c_3}{c_1}$, $c_2 = \frac{b_2c_1}{b_1}$, $a_2b_1 + a_3c_1 + b_2^2 + 2b_2c_3 + c_3^2 < 0$, pour cette famille $m = 24$;
- (vii) $a_1 = -b_2 - c_3$, $a_2 = -\frac{b_2(b_2 + c_3)}{b_1}$, $c_2 = \frac{b_2c_1}{b_1}$, $\frac{1}{b_1}(a_3b_1c_1 + b_2b_3c_1 + b_1c_3^2) < 0$, pour cette famille $m = 24$;
- (viii) $a_1 = -b_2 - c_3$, $a_3 = \frac{a_2(b_1c_3 - b_3c_1) + (b_2 + c_3)(b_2c_3 - b_3c_2)}{b_1c_2 - b_2c_1}$, $\frac{A}{b_1c_2 - b_2c_1} > 0$, pour cette famille $m = 25$,
où $A = -(-b_2^3c_1 + b_1b_2^2c_2 + b_2(-2b_3c_1c_2 + b_1c_2c_3) + c_2(b_1b_3c_2 - b_3c_1c_3 + b_1c_3^2) + a_2(b_1^2c_2 - b_3c_1^2 + b_1c_1(c_3 - b_2)))$.

La Proposition 1 est prouvée dans la section 3.3.

Nous définissons les huit ensembles de conditions suivants

- (i) $a_1 = a_{11}\varepsilon$, $b_1 = b_{11}\varepsilon$, $b_2 = b_{21}\varepsilon$, $c_1 = c_{11}\varepsilon$, $c_3 = c_{31}\varepsilon$, $b_3c_2 < 0$;
- (ii) $a_1 = -(b_{20} + b_{21}\varepsilon)$, $b_2 = b_{20} + b_{21}\varepsilon$, $c_1 = c_{11}\varepsilon$, $c_2 = c_{21}\varepsilon$, $c_3 = c_{31}\varepsilon$, $a_2b_1 + b_2^2 < 0$;
- (iii) $a_1 = a_{11}\varepsilon$, $b_2 = b_{20} + b_{21}\varepsilon$, $c_1 = c_{11}\varepsilon$, $b_1 = b_{11}\varepsilon$, $c_3 = -(b_{20} + b_{21}\varepsilon)$, $b_3c_2 + b_2^2 < 0$;
- (iv) $a_1 = -(c_{30} + c_{31}\varepsilon)$, $b_1 = b_{11}\varepsilon$, $b_2 = b_{21}\varepsilon$, $b_3 = b_{31}\varepsilon$, $c_3 = c_{30} + c_{31}\varepsilon$, $a_3c_1 + c_3^2 < 0$;

$$(v) \quad a_1 = -(c_{30} + c_{31}\varepsilon), \quad b_1 = b_{11}\varepsilon, \quad b_2 = b_{21}\varepsilon, \quad c_3 = c_{30} + c_{31}\varepsilon, \quad a_2 = -\frac{c_2 c_{30}}{c_1} - \frac{c_2 c_{31}}{c_1}\varepsilon, \quad a_3 c_1 + b_3 c_2 + c_3^2 < 0;$$

$$(vi) \quad a_1 = -b_{20} - c_{30} - (b_{21} + c_{31})\varepsilon, \quad b_2 = b_{20} + b_{21}\varepsilon, \quad b_3 = \frac{b_1 c_{30}}{c_1} + \frac{b_1 c_{31}}{c_1}\varepsilon, \quad c_2 = \frac{b_{20} c_1}{b_1} + \frac{b_{21} c_1}{b_1}\varepsilon, \quad c_3 = c_{30} + c_{31}\varepsilon, \quad a_2 b_1 + a_3 c_1 + b_2^2 + 2b_2 c_3 + c_3^2 < 0;$$

$$(vii) \quad a_1 = -b_{20} - c_{30} - (b_{21} + c_{31})\varepsilon, \quad b_2 = b_{20} + b_{21}\varepsilon, \quad a_2 = \frac{-b_{20}(b_{20} + c_{30})}{b_1} - \frac{b_{20}(b_{21} + c_{31})}{b_1}\varepsilon - \frac{b_{21}(b_{20} + c_{30})}{b_1}\varepsilon, \quad c_2 = \frac{b_{20} c_1}{b_1} + \frac{b_{21} c_1}{b_1}\varepsilon, \quad c_3 = c_{30} + c_{31}\varepsilon, \quad \frac{1}{b_1}(a_3 b_1 c_1 + b_2 b_3 c_1 + b_1 c_3^2) < 0;$$

$$(viii) \quad a_1 = -b_2 - c_{30} - c_{31}\varepsilon, \quad c_3 = c_{30} + c_{31}\varepsilon, \quad \frac{A}{b_1 c_2 - b_2 c_1} > 0, \quad a_3 = \frac{1}{b_1 c_2 - b_2 c_1} \left(a_2 (b_1 c_{30} - b_3 c_1) + (b_2 + c_{30})(b_2 c_{30} - b_3 c_2) \right) + \frac{a_2 b_1 c_{31} + (b_2 + c_{30}) b_2 c_{31} + c_{31} (b_2 c_{30} - b_3 c_2)}{b_1 c_2 - b_2 c_1} \varepsilon.$$

Théorème 3.1.1 *Supposons que la famille de systèmes de Kolmogorov (3.2) de la Proposition 1 soit perturbée par la condition (r), pour $r \in \{i, ii, iii, iv, v, vi, vii, viii\}$. Alors, pour $\varepsilon \neq 0$ suffisamment petit, le système perturbé (3.2) a une ou deux orbites périodiques $(x(t, \varepsilon), y(t, \varepsilon), z(t, \varepsilon))$ bifurquant de l'équilibre zéro-Hopf $(1, 1, 1)$ lorsque $\varepsilon = 0$.*

La structure du reste de cet article est la suivante. Dans la section 3.2, nous présentons les résultats de base de la théorie de l'averaging dont nous avons besoin pour prouver le Théorème 3.1.1, et dans la section 3.3, nous prouvons la Proposition 1 et le Théorème 3.1.1.

3.2 Théorie de moyennisation pour les orbites périodiques

La théorie de moyennisation est un outil classique et mûr pour étudier la dynamique des systèmes dynamiques non linéaires et lisses, et en particulier pour étudier leurs orbites périodiques. La théorie de moyennisation a une longue histoire qui commence avec les travaux classiques de Lagrange et Laplace qui ont fourni une justification intuitive de cette théorie. La première formalisation de cette théorie est due à Fatou [19] en 1928. Des contributions pratiques et théoriques importantes à cette théorie ont été apportées par Krylov et Bogoliubov [7] dans les années 1930 et par Bogoliubov [6] en 1945. La théorie de moyennisation de premier ordre pour l'étude des orbites périodiques peut être trouvée dans [54], voir aussi [25].

Nous présentons maintenant les résultats de base de la théorie de moyennisation de premier ordre dont nous aurons besoin pour prouver les résultats de cet article. Le théorème suivant fournit également une approximation de premier ordre pour les orbites périodiques d'un système différentiel périodique et des informations sur leur type de stabilité; pour une preuve, voir par exemple les théorèmes 11.5 et 11.6 de Verhulst [54].

Considérons le système différentiel

$$\dot{\mathbf{x}} = \varepsilon F(t, \mathbf{x}) + \varepsilon^2 G(t, \mathbf{x}, \varepsilon), \quad \mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0, \quad (3.3)$$

avec $\mathbf{x} \in D$, où D est un sous-ensemble ouvert de \mathbb{R}^n , $t \geq 0$. De plus, nous supposons que $F(t, \mathbf{x})$ et $G(t, \mathbf{x}, \varepsilon)$ sont T -périodiques en t . Nous considérons également dans D l'équation différentielle moyennée

$$\dot{\mathbf{y}} = \varepsilon f(\mathbf{y}), \quad \mathbf{y}(0) = \mathbf{x}_0, \quad (3.4)$$

où

$$f(\mathbf{y}) = \frac{1}{T} \int_0^T F(t, \mathbf{y}) dt. \quad (3.5)$$

Théorème 3.2.1 *Considérons les deux problèmes de valeurs initiales (3.3) et (3.4). Supposons que*

- (i) *F, son Jacobien $\partial F/\partial x$, son Hessien $\partial^2 F/\partial x^2$, G et son Jacobien $\partial G/\partial x$ sont définis, continus et bornés par une constante indépendante de ε dans $[0, \infty) \times D$ et $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0]$.*
- (ii) *F et G sont T-périodiques en t (T indépendant de ε).*

Alors les énoncés suivants sont valables.

- (a) *Si p est un point d'équilibre de l'équation moyennée (3.4) et*

$$\det \left(\frac{\partial f}{\partial \mathbf{y}} \right) \Big|_{\mathbf{y}=p} \neq 0, \quad (3.6)$$

alors il existe un cycle limite $\mathbf{x}(t, \varepsilon)$ de période T de l'équation (3.3) tel que $\mathbf{x}(0, \varepsilon) \rightarrow p$ lorsque $\varepsilon \rightarrow 0$.

- (b) *La stabilité ou l'instabilité du cycle limite $\mathbf{x}(t, \varepsilon)$ est donnée par la stabilité ou l'instabilité du point d'équilibre p du système moyenné (3.4). Si p est un zéro simple du système moyenné (3.4), les valeurs propres de la matrice Jacobienne évaluées en p fournissent la stabilité linéaire, c'est-à-dire que si une valeur propre a une partie réelle positive, alors le cycle limite associé au zéro p est instable ; si toutes les valeurs propres ont une partie réelle négative, alors le cycle limite est stable.*

3.3 Preuve de la proposition 1 et du théorème 3.1.1.

Preuve 1 (Preuve de la Proposition 1) *Le polynôme caractéristique de la partie linéaire du système de Kolmogorov (3.2) au point d'équilibre (1, 1, 1) est*

$$\begin{aligned} p(\lambda) = & -\lambda^3 + (a_1 + b_2 + c_3)\lambda^2 + (a_2b_1 - a_1b_2 + a_3c_1 + b_3c_2 - a_1c_3 - b_2c_3)\lambda \\ & + a_1b_2c_3 - a_1b_3c_2 + a_2b_3c_1 - a_2b_1c_3 + a_3b_1c_2 - a_3b_2c_1. \end{aligned}$$

En imposant que le polynôme caractéristique soit $p(\lambda) = -\lambda(\lambda^2 + \omega^2)$ avec $\omega \neq 0$, c'est-à-dire en imposant que les valeurs propres au point d'équilibre (1, 1, 1) soient 0, ωi et $-\omega i$ avec $\omega \neq 0$, et par conséquent que le point d'équilibre (1, 1, 1) soit un équilibre de type zéro-Hopf, nous obtenons le système

$$\begin{aligned} a_1 + b_2 + c_3 &= 0, \\ a_2b_1 - a_1b_2 + a_3c_1 + b_3c_2 - a_1c_3 - b_2c_3 &= -\omega^2, \\ a_1b_2c_3 - a_1b_3c_2 + a_2b_3c_1 - a_2b_1c_3 + a_3b_1c_2 - a_3b_2c_1 &= 0. \end{aligned}$$

Des calculs fastidieux montrent que les solutions du système précédent sont les huit familles d'équilibres zéro-Hopf décrites dans l'énoncé de la Proposition 1. Ces calculs ont également été vérifiés en utilisant les logiciels de manipulation algébrique Maple et Mathematica. Cela complète la preuve.

Pour $r \in \{i, ii, iii, iv, v, vi, vii, viii\}$, nous allons prouver qu'une ou deux orbites périodiques bifurquent du point d'équilibre zéro-Hopf (1, 1, 1) de la famille (r) des systèmes de Kolmogorov (3.2) de la Proposition 1, satisfaisant la condition (r), lorsque les paramètres de cette famille sont perturbés. Nous fournirons tous les détails de la preuve pour (r)=(i), les preuves pour les autres familles sont analogues et nous indiquons seulement les étapes principales de ces preuves.

Preuve 2 (Preuve du Théorème 3.1.1 sous la condition (i)) *Nous considérons le système de Kolmogorov*

(3.2) perturbé avec les paramètres donnés dans la condition (i). Après avoir translaté le point d'équilibre $(1, 1, 1)$ du système perturbé à l'origine des coordonnées en effectuant le changement de variables $x = X + 1, y = Y + 1, z = Z + 1$. Alors, ce système de Kolmogorov perturbé dans les nouvelles variables (X, Y, Z) devient

$$\begin{aligned} \dot{X} &= (X + 1)(X^2d_1 + XYe_1 + XZf_1 + \varepsilon Xa_{11} + Y^2g_1 + YZh_1 + \varepsilon Yb_{11} + Z^2k_1 + \varepsilon Zc_{11}), \\ \dot{Y} &= (Y + 1)(X^2d_2 + XYe_2 + XZf_2 + Y^2g_2 + YZh_2 + Y\varepsilon b_{21} + Z^2k_2 + Xa_2 + Zc_2), \\ \dot{Z} &= (Z + 1)(X^2d_3 + XYe_3 + XZf_3 + Y^2g_3 + YZh_3 + Z^2k_3 + Z\varepsilon c_{31} + Xa_3 + Yb_3). \end{aligned} \quad (3.7)$$

Afin de faciliter l'application de La théorie de moyennisation, décrite dans la section 3.2, pour étudier la bifurcation de zéro-Hopf du système (3.7) à l'origine des coordonnées, nous écrivons la partie linéaire du système (3.7) avec $\varepsilon = 0$ au point d'équilibre $(0, 0, 0)$ dans sa forme normale de Jordan réelle

$$\begin{pmatrix} 0 & -\sqrt{-b_3c_2} & 0 \\ \sqrt{-b_3c_2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \text{ tel que } b_3c_2 < 0.$$

Pour cela, nous effectuons le changement de variables suivant

$$\begin{pmatrix} u \\ v \\ w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{a_3}{\sqrt{-b_3c_2}} & -\sqrt{-\frac{b_3}{c_2}} & 0 \\ \frac{a_2}{c_2} & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \end{pmatrix},$$

avec inverse

$$\begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ b_3\sqrt{-\frac{c_2}{b_3^3}} & 0 & -\frac{a_3}{b_3} \\ 0 & 1 & -\frac{a_2}{c_2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ v \\ w \end{pmatrix}. \quad (3.8)$$

Dans les variables (u, v, w) , le système différentiel (3.7) s'écrit

$$\begin{aligned} \dot{u} &= -\frac{1}{\sqrt{-c_2b_3c_2^2b_3^2}}(((u^2b_3g_2 - vb_3^2)c_2^3 + ((-w^2d_2 + (-vf_2 - e_2)w - k_2v^2 - vh_2)b_3^2 - ((e_1 - 2e_2) \\ & w^2 + ((h_1 - 2h_2)v + e_1 - 2g_2)w + h_1v)a_3b_3 + a_3^2w((2g_1 - 3g_2)w + 2g_1))c_2^2 + a_2((2vk_2 + \\ & wf_2 + h_2)b_3 + ((h_1 - 2h_2)w + h_1)a_3)wb_3c_2 - k_2w^2a_2^2b_3^2)u\sqrt{-c_2b_3} + b_3(-vb_3^2 + ((u^2e_2 + v \\ & a_3)w + u^2(vh_2 + g_2))b_3 + a_3((g_1 - 3g_2)w + g_1)u^2)c_2^3 + ((-v^2k_2 - vwf_2 - w^2d_2)b_3^3 + (-a_3 \\ & (d_1 - d_2)w^3 + a_3((-f_1 + f_2)v + e_2 - d_1)w^2 + (-v((k_1 - k_2)v + f_1 - h_2)a_3 - u^2h_2a_2)w - \\ & k_1v^2a_3)b_3^2 + a_3^2w((e_1 - e_2)w^2 + ((h_1 - h_2)v + e_1 - g_2)w + h_1v)b_3 - a_3^3w^2((g_1 - g_2)w + g_1)) \\ & c_2^2 + a_2((2vk_2 + wf_2)b_3^2 + a_3((f_1 - f_2)w^2 + ((2k_1 - 2k_2)v + f_1 - h_2)w + 2k_1v)b_3 - a_3^2w((\\ & h_1 - h_2)w + h_1))wb_3c_2 - (k_2b_3 + ((k_1 - k_2)w + k_1)a_3)a_2^2w^2b_3^2) + \frac{\varepsilon}{c_2^2b_3^2(-c_2b_3)^{\frac{3}{2}}}(c_2^2(- \\ & \sqrt{-c_2b_3}c_2u(((b_{11} - 2b_{21})w + b_{11})a_3 + b_{21}b_3) + u^2b_3b_{21}c_2^2 - a_3(((b_{21} - b_{11})w - b_{11})wa_3 - (- \\ & w^2a_{11} + (-vc_{11} - a_{11} + b_{21})w - c_{11}v)b_3)c_2 + wa_2a_3b_3c_{11}(w + 1))b_3^2), \\ \dot{v} &= -\frac{1}{c_2^3b_3^2}(-((v + 1)(b_3^2 + (vh_3 + we_3)b_3 - 2g_3wa_3)c_2^2 + a_2(-wb_3^2 + ((e_1 - e_3)w^2 + ((h_1 - 2h_3) \\ & v + e_1 - h_3)w + h_1v)b_3 - 2a_3w((g_1 - g_3)w + g_1))c_2 - a_2^2wb_3((h_1 - h_3)w + h_1))c_2u \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & \sqrt{-c_2 b_3} + u^2 g_3 b_3 (v+1) c_2^4 + (-(v+1)(v^2 k_3 + v w f_3 + w^2 d_3) b_3^2 + (e_3 a_3 (v+1) w^2 + (u^2 (g_1 \\
 & - g_3) a_2 + h_3 v a_3 (v+1)) w + u^2 g_1 a_2) b_3 - g_3 w^2 a_3^2 (v+1)) c_2^3 + (((-d_1 + d_3) w^3 + ((-f_1 + \\
 & 2f_3) v + f_3 - d_1) w^2 - v((k_1 - 3k_3) v + f_1 - 2k_3) w - k_1 v^2) b_3^2 + a_3 w((e_1 - e_3) w^2 + ((h_1 - \\
 & 2h_3) v + e_1 - h_3) w + h_1 v) b_3 - a_3^2 w^2 ((g_1 - g_3) w + g_1) a_2 c_2^2 + a_2^2 w b_3 (((f_1 - f_3) w^2 + ((2k_1 \\
 & - 3k_3) v + f_1 - k_3) w + 2k_1 v) b_3 - a_3 w((h_1 - h_3) w + h_1) c_2 - a_2^3 ((k_1 - k_3) w + k_1) w^2 b_3^2 - \\
 & \frac{\varepsilon}{c_2^3 b_3^2} (-c_2 b_3 (u a_2 c_2 b_{11} (w+1) \sqrt{-c_2 b_3} - ((c_{11} - c_{31}) w + c_{11}) w b_3 a_2^2 + c_2 ((w^2 a_{11} + ((-2v - 1 \\
 &) c_{31} + c_{11} v + a_{11}) w + c_{11} v) b_3 - w a_3 b_{11} (w+1)) a_2 + v b_3 c_2^2 c_{31} (v+1))), \\
 \dot{w} = & -\frac{1}{c_2^2 b_3^2} ((w+1)(-c_2((v h_1 + w e_1) b_3 - 2g_1 w a_3) c_2 - h_1 w a_2 b_3) \sqrt{-c_2 b_3} u + u^2 b_3 c_2^3 g_1 + ((-v^2 \\
 & k_1 - v w f_1 - w^2 d_1) b_3^2 + w a_3 (v h_1 + w e_1) b_3 - g_1 w^2 a_3^2) c_2^2 + a_2 w((2v k_1 + w f_1) b_3 - h_1 w a_3) b_3 \\
 & c_2 - w^2 a_2^2 b_3^2 k_1)) - \frac{\varepsilon}{c_2^2 b_3^2} (-(w+1) c_2 b_3 (\sqrt{-c_2 b_3} u b_{11} c_2 + ((v c_{11} + w a_{11}) b_3 - w a_3 b_{11}) c_2 - a_2 \\
 & w b_3 c_{11})).
 \end{aligned} \tag{3.9}$$

En effectuant la mise à l'échelle des variables $(u, v, w) = (\varepsilon U, \varepsilon V, \varepsilon W)$, le système (3.9) dans les nouvelles variables (U, V, W) s'écrit

$$\begin{aligned}
 \dot{U} = & \frac{b_3 c_2 V}{\sqrt{-b_3 c_2}} - \frac{\varepsilon}{\sqrt{-b_3 c_2} b_3^2 c_2^2} (((-a_2^2 k_2 + a_2 c_2 f_2 - c_2^2 d_2) b_3^3 + (a_3 (e_2 - d_1) c_2^2 + a_2 a_3 (f_1 - h_2) c_2 - \\
 & k_1 a_2^2 a_3) b_3^2 + (a_3 (e_1 - g_2) c_2 - h_1 a_2 a_3) a_3 c_2 b_3 - g_1 a_3^3 c_2^2) W^2 + (-U((-a_2 h_2 + c_2 e_2) b_3^2 + ((e_1 \\
 & - 2g_2) c_2 - h_1 a_2) a_3 b_3 - 2a_3^2 c_2 g_1) c_2 \sqrt{-c_2 b_3} + (2V a_2 c_2 k_2 - V c_2^2 f_2) b_3^3 + (V a_3 c_2^3 + a_3((-f_1 \\
 & + h_2) V - a_{11} + b_{21}) c_2^2 + a_2 a_3 (2V k_1 + c_{11}) c_2) b_3^2 + (V h_1 + b_{11}) c_2^2 a_2^2 b_3) W - U((V c_2^2 + (V h_2 \\
 & + b_{21}) c_2) b_3^2 + (V h_1 + b_{11}) c_2 a_3 b_3) c_2 \sqrt{-c_2 b_3} - V^2 k_2 c_2^2 b_3^3 + (U^2 g_2 c_2^3 + a_3(-V^2 k_1 - V c_{11}) c_2^2) \\
 & b_3^2 + U^2 g_1 c_2^3 a_3 b_3), \\
 \dot{V} = & U \sqrt{-c_2 b_3} - \frac{\varepsilon}{c_2^3 b_3^2} ((((-a_3^2 g_3 + a_3 b_3 e_3 - b_3^2 d_3) c_2^3 + ((f_3 - d_1) b_3^2 + (e_1 - h_3) a_3 b_3 - g_1 a_3^2) a_2 c_2^2 \\
 & + a_2^2 b_3 ((f_1 - k_3) b_3 - h_1 a_3) c_2 - a_3^2 b_3^2 k_1) W^2 - (c_2((-2a_3 g_3 + b_3 e_3) c_2^2 + (-b_3^2 + (e_1 - h_3) b_3 \\
 & - 2g_1 a_3) a_2 c_2 - h_1 a_2^2 b_3) U \sqrt{-c_2 b_3} - (V a_3 b_3 h_3 - V b_3^2 f_3) c_2^3 - (((-f_1 + 2k_3) V - a_{11} + c_{31}) \\
 & b_3^2 + (V h_1 + b_{11}) a_3 b_3) a_2 c_2^2 - a_2^2 b_3^2 (2V k_1 + c_{11}) c_2) W) + (-c_2((V b_3^2 + V b_3 h_3) c_2^2 + (V h_1 + \\
 & b_{11}) b_3 a_2 c_2) U \sqrt{-c_2 b_3} + U^2 b_3 c_2^4 g_3 + ((-V^2 k_3 - V c_{31}) b_3^2 + U^2 a_2 g_1 b_3) c_2^3 + (-V^2 k_1 - V c_{11}) \\
 & b_3^2 a_2 c_2^2)), \\
 \dot{W} = & -\frac{\varepsilon}{c_2^2 b_3^2} (((-a_2^2 k_1 + a_2 c_2 f_1 - c_2^2 d_1) b_3^2 - a_3 c_2 (a_2 h_1 - c_2 e_1) b_3 - c_2^2 g_1 a_3^2) W^2 + (((a_2 h_1 - c_2 e_1) \\
 & b_3 + 2a_3 c_2 g_1) U \sqrt{-c_2 b_3} + b_3 (((-V f_1 - a_{11}) c_2 + a_2 (2V k_1 + c_{11})) b_3 + (V h_1 + b_{11}) c_2 a_3)) c_2 \\
 & W + c_2^2 b_3 (-U (V h_1 + b_{11}) \sqrt{c_2 b_3} + (-V^2 k_1 - V c_{11}) b_3 + U^2 c_2 g_1)).
 \end{aligned} \tag{3.10}$$

Maintenant, nous passons du système différentiel (3.10) aux coordonnées cylindriques (r, θ, W) définies par $U = r \cos \theta$ et $V = r \sin \theta$, et nous obtenons

$$\begin{aligned}
 \dot{r} &= \frac{\varepsilon}{\sqrt{-c_2 b_3 b_3^2 c_2^3}} \left((-b_3 c_2 r ((g_3 - b_3) c_2^2 + ((-h_2 + k_3) b_3 + g_1 a_2 - h_1 a_3) c_2 + k_1 a_2 b_3) \sin(\theta) + ((e_2 - f_3) W + b_{21} - c_{31}) b_3^2 + ((e_1 - 2g_2 + h_3) W + b_{11}) a_3 b_3 - 2W g_1 a_3^2 c_2^2 - a_2 b_3^2 ((f_1 + h_2 - 2k_3) W + c_{11}) c_2 + 2b_3^2 W a_2^2 k_1 c_2 r \cos^2(\theta) + (((W^2 d_3 + r^2 k_3) b_3^2 - W^2 e_3 a_3 b_3 + W^2 g_3 a_3^2) c_2^3 - a_2 (((f_3 - d_1) W^2 + (-a_{11} + c_{31}) W - r^2 k_1) b_3^2 + W ((e_1 - h_3) W + b_{11}) a_3 b_3 - W^2 g_1 a_3^2) c_2^2 - W a_2^2 b_3 (((f_1 - k_3) W + c_{11}) b_3 - W h_1 a_3) c_2 + W^2 k_1 a_2^3 b_3^2) \sin(\theta) + (((W f_3 + c_{31}) b_3 - W h_3 a_3) c_2^2 + (((f_1 - 2k_3) W + c_{11}) b_3 - W h_1 a_3) a_2 c_2 - 2W k_1 a_2^2 b_3) b_3 c_2 r) \sqrt{-b_3 c_2} - c_2 \cos(\theta) ((-b_3^2 + (g_2 - h_3) b_3 + g_1 a_3) c_2 - b_3 (a_2 h_1 - a_3 k_1 - b_3 k_2)) b_3 c_2^2 r^2 \cos^2(\theta) + b_3 c_2 r (((e_3 + a_3) b_3 - 2g_3 a_3) W c_2^2 + (-W (f_2 + a_2) b_3^2 + (((e_1 - h_3) a_2 - a_3 (f_1 - h_2)) W + b_{11} a_2 - c_{11} a_3) b_3 + (-2a_2 a_3 g_1 + a_3^2 h_1) W) c_2 - W a_2 b_3 (a_2 h_1 - 2a_3 k_1 - 2b_3 k_2)) \sin(\theta) + r^2 b_3^2 (h_3 + b_3) c_2^3 + ((-W^2 d_2 - r^2 k_2) b_3^3 + (a_3 (e_2 - d_1) W^2 - a_3 (a_{11} - b_{21}) W + r^2 (a_2 h_1 - a_3 k_1)) b_3^2 + W a_3^2 ((e_1 - g_2) W + b_{11}) b_3 - W^2 g_1 a_3^3) c_2^2 + (W f_2 b_3^2 + ((f_1 - h_2) W + c_{11}) a_3 b_3 - W h_1 a_3^2) W a_2 b_3 c_2 - W^2 a_2^2 b_3^2 (a_3 k_1 + b_3 k_2)) \right), \\
 \dot{\theta} &= -\frac{b_3 c_2}{\sqrt{-b_3 c_2}} + \frac{\varepsilon}{\sqrt{-b_3 c_2 c_2^3 b_3^2 r}} \left(\cos \theta (-b_3 ((g_3 - b_3) c_2^2 + ((-h_2 + k_3) b_3 + g_1 a_2 - h_1 a_3) c_2 + k_1 a_2 b_3) c_2^2 r^2 \cos^2 \theta - (((e_2 - f_3) W + b_{21} - c_{31}) b_3^2 + ((e_1 - 2g_2 + h_3) W + b_{11}) a_3 b_3 - 2W g_1 a_3^2) c_2^2 - a_2 b_3^2 ((f_1 + h_2 - 2k_3) W + c_{11}) c_2 + 2b_3^2 W a_2^2 k_1 c_2 r \sin \theta - c_2^4 b_3^2 r^2 + ((W^2 d_3 - r^2 (h_2 - k_3)) b_3^2 - a_3 (W^2 e_3 + r^2 h_1) b_3 + W^2 g_3 a_3^2) c_2^3 - a_2 (((f_3 - d_1) W^2 + (-a_{11} + c_{31}) W - r^2 k_1) b_3^2 + W ((e_1 - h_3) W + b_{11}) a_3 b_3 - W^2 g_1 a_3^2) c_2^2 - W a_2^2 b_3 (((f_1 - k_3) W + c_{11}) b_3 - W h_1 a_3) c_2 + W^2 k_1 a_2^3 b_3^2) \sqrt{-b_3 c_2} + (-(-c_2 ((-b_3^2 + (g_2 - h_3) b_3 + g_1 a_3) c_2 - b_3 (a_2 h_1 - a_3 k_1 - b_3 k_2)) r \sin \theta + ((e_3 + a_3) b_3 - 2g_3 a_3) W c_2^2 + (-W (f_2 + a_2) b_3^2 + (((-f_1 + h_2) a_3 + (e_1 - h_3) a_2) W + b_{11} a_2 - c_{11} a_3) b_3 + (-2a_2 a_3 g_1 + a_3^2 h_1) W) c_2 - W a_2 b_3 (a_2 h_1 - 2a_3 k_1 - 2b_3 k_2)) b_3 c_2 r \cos^2 \theta + (((-W^2 d_2 - r^2 k_2) b_3^3 + a_3 ((e_2 - d_1) W^2 + (-a_{11} + b_{21}) W - r^2 k_1) b_3^2 + W a_3^2 ((e_1 - g_2) W + b_{11}) b_3 - W^2 g_1 a_3^3) c_2^2 + (W f_2 b_3^2 + ((f_1 - h_2) W + c_{11}) a_3 b_3 - W h_1 a_3^2) W a_2 b_3 c_2 - W^2 a_2^2 b_3^2 (a_3 k_1 + b_3 k_2)) \sin \theta - b_3 c_2 (-W a_3 c_2^2 b_3 + (W f_2 b_3^2 + ((f_1 - h_2) W + c_{11}) a_3 b_3 - W h_1 a_3^2) c_2 - 2W a_2 b_3 (a_3 k_1 + b_3 k_2)) r) c_2 \right), \\
 \dot{W} &= \frac{\varepsilon}{c_2^2 b_3^2} \left(((a_2^2 k_1 - a_2 c_2 f_1 + c_2^2 d_1) b_3^2 + a_3 c_2 (a_2 h_1 - c_2 e_1) b_3 + a_3^2 c_2^2 g_1) W^2 - c_2 (r ((a_3 h_1 - b_3 f_1) c_2 + 2k_1 a_2 b_3) b_3 \sin \theta + r ((2a_3 g_1 - b_3 e_1) c_2 + h_1 a_2 b_3) \sqrt{-b_3 c_2} \cos \theta + (a_3 b_3 b_{11} - a_{11} b_3^2) c_2 + a_2 b_3^2 c_{11}) W + r b_3 c_2^2 (-r (b_3 k_1 + c_2 g_1) \cos^2 \theta + \cos \theta (r \sin \theta h_1 + b_{11}) \sqrt{-b_3 c_2} + b_3 (r k_1 + c_{11} \sin \theta)) \right).
 \end{aligned} \tag{3.11}$$

Nous changeons la variable indépendante de t à θ , et en notant la dérivée par rapport à θ par un point, le système différentiel (3.11) devient

$$\begin{aligned}
 \dot{r} &= -\frac{\varepsilon}{b_3^3 c_2^4} \left((-b_3 c_2 r ((g_3 - b_3) c_2^2 + ((-h_2 + k_3) b_3 + g_1 a_2 - h_1 a_3) c_2 + k_1 a_2 b_3) \sin(\theta) + (((e_2 - f_3) W + b_{21} - c_{31}) b_3^2 + ((e_1 - 2g_2 + h_3) W + b_{11}) a_3 b_3 - 2W g_1 a_3^2) c_2^2 - a_2 b_3^2 ((f_1 + h_2 - 2k_3) W + c_{11}) c_2 + 2b_3^2 W a_2^2 k_1 c_2 r \cos^2(\theta) + (((W^2 d_3 + r^2 k_3) b_3^2 - W^2 e_3 a_3 b_3 + W^2 g_3 a_3^2) c_2^3 - a_2 (((f_3 - d_1) W^2 + (-a_{11} + c_{31}) W - r^2 k_1) b_3^2 + W ((e_1 - h_3) W + b_{11}) a_3 b_3 - W^2 g_1 a_3^2) c_2^2 - W a_2^2 b_3 (((f_1 - k_3) W + c_{11}) b_3 - W h_1 a_3) c_2 + W^2 k_1 a_2^3 b_3^2) \sin(\theta) + (((W f_3 + c_{31}) b_3 - W h_3 a_3) c_2^2 + (((f_1 - 2k_3) W + c_{11}) b_3 - W h_1 a_3) a_2 c_2 - 2W k_1 a_2^2 b_3) b_3 c_2 r) \sqrt{-b_3 c_2} - c_2 \cos(\theta) ((-b_3^2 + (g_2 - h_3) b_3 + g_1 a_3) c_2 - b_3 (a_2 h_1 - a_3 k_1 - b_3 k_2)) b_3 c_2^2 r^2 \cos^2(\theta) + b_3 c_2 r (((e_3 + a_3) b_3 - 2g_3 a_3) W c_2^2 + (-W (f_2 + a_2) b_3^2 + (((e_1 - h_3) a_2 - a_3 (f_1 - h_2)) W + b_{11} a_2 - c_{11} a_3) b_3 + (-2a_2 a_3 g_1 + a_3^2 h_1) W) c_2 - W a_2 b_3 (a_2 h_1 - 2a_3 k_1 - 2b_3 k_2)) \sin(\theta) + r^2 b_3^2 (h_3 + b_3) c_2^3 + ((-W^2 d_2 - r^2 k_2) b_3^3 + (a_3 (e_2 - d_1) W^2 - a_3 (a_{11} - b_{21}) W + r^2 (a_2 h_1 - a_3 k_1)) b_3^2 + W a_3^2 ((e_1 - g_2) W + b_{11}) b_3 - W^2 g_1 a_3^3) c_2^2 + (W f_2 b_3^2 + ((f_1 - h_2) W + c_{11}) a_3 b_3 - W h_1 a_3^2) W a_2 b_3 c_2 - W^2 a_2^2 b_3^2 (a_3 k_1 + b_3 k_2)) \right), \\
 \dot{\theta} &= -\frac{b_3 c_2}{\sqrt{-b_3 c_2}} + \frac{\varepsilon}{\sqrt{-b_3 c_2 c_2^3 b_3^2 r}} \left(\cos \theta (-b_3 ((g_3 - b_3) c_2^2 + ((-h_2 + k_3) b_3 + g_1 a_2 - h_1 a_3) c_2 + k_1 a_2 b_3) c_2^2 r^2 \cos^2 \theta - (((e_2 - f_3) W + b_{21} - c_{31}) b_3^2 + ((e_1 - 2g_2 + h_3) W + b_{11}) a_3 b_3 - 2W g_1 a_3^2) c_2^2 - a_2 b_3^2 ((f_1 + h_2 - 2k_3) W + c_{11}) c_2 + 2b_3^2 W a_2^2 k_1 c_2 r \sin \theta - c_2^4 b_3^2 r^2 + ((W^2 d_3 - r^2 (h_2 - k_3)) b_3^2 - a_3 (W^2 e_3 + r^2 h_1) b_3 + W^2 g_3 a_3^2) c_2^3 - a_2 (((f_3 - d_1) W^2 + (-a_{11} + c_{31}) W - r^2 k_1) b_3^2 + W ((e_1 - h_3) W + b_{11}) a_3 b_3 - W^2 g_1 a_3^2) c_2^2 - W a_2^2 b_3 (((f_1 - k_3) W + c_{11}) b_3 - W h_1 a_3) c_2 + W^2 k_1 a_2^3 b_3^2) \sqrt{-b_3 c_2} + (-(-c_2 ((-b_3^2 + (g_2 - h_3) b_3 + g_1 a_3) c_2 - b_3 (a_2 h_1 - a_3 k_1 - b_3 k_2)) r \sin \theta + ((e_3 + a_3) b_3 - 2g_3 a_3) W c_2^2 + (-W (f_2 + a_2) b_3^2 + (((-f_1 + h_2) a_3 + (e_1 - h_3) a_2) W + b_{11} a_2 - c_{11} a_3) b_3 + (-2a_2 a_3 g_1 + a_3^2 h_1) W) c_2 - W a_2 b_3 (a_2 h_1 - 2a_3 k_1 - 2b_3 k_2)) b_3 c_2 r \cos^2 \theta + (((-W^2 d_2 - r^2 k_2) b_3^3 + a_3 ((e_2 - d_1) W^2 + (-a_{11} + b_{21}) W - r^2 k_1) b_3^2 + W a_3^2 ((e_1 - g_2) W + b_{11}) b_3 - W^2 g_1 a_3^3) c_2^2 + (W f_2 b_3^2 + ((f_1 - h_2) W + c_{11}) a_3 b_3 - W h_1 a_3^2) W a_2 b_3 c_2 - W^2 a_2^2 b_3^2 (a_3 k_1 + b_3 k_2)) \sin \theta - b_3 c_2 (-W a_3 c_2^2 b_3 + (W f_2 b_3^2 + ((f_1 - h_2) W + c_{11}) a_3 b_3 - W h_1 a_3^2) c_2 - 2W a_2 b_3 (a_3 k_1 + b_3 k_2)) r) c_2 \right), \\
 \dot{W} &= \frac{\varepsilon}{c_2^2 b_3^2} \left(((a_2^2 k_1 - a_2 c_2 f_1 + c_2^2 d_1) b_3^2 + a_3 c_2 (a_2 h_1 - c_2 e_1) b_3 + a_3^2 c_2^2 g_1) W^2 - c_2 (r ((a_3 h_1 - b_3 f_1) c_2 + 2k_1 a_2 b_3) b_3 \sin \theta + r ((2a_3 g_1 - b_3 e_1) c_2 + h_1 a_2 b_3) \sqrt{-b_3 c_2} \cos \theta + (a_3 b_3 b_{11} - a_{11} b_3^2) c_2 + a_2 b_3^2 c_{11}) W + r b_3 c_2^2 (-r (b_3 k_1 + c_2 g_1) \cos^2 \theta + \cos \theta (r \sin \theta h_1 + b_{11}) \sqrt{-b_3 c_2} + b_3 (r k_1 + c_{11} \sin \theta)) \right).
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & W + c_{11})c_2 + 2b_3^2 W a_2^2 k_1) c_2 r \cos^2(\theta) + (((W^2 d_3 + r^2 k_3) b_3^2 - W^2 e_3 a_3 b_3 + W^2 g_3 a_3^2) c_2^3 - a_2(\\
 & ((f_3 - d_1) W^2 + (-a_{11} + c_{31}) W - r^2 k_1) b_3^2 + W((e_1 - h_3) W + b_{11}) a_3 b_3 - W^2 g_1 a_3^2) c_2^2 - W \\
 & a_2^2 b_3(((f_1 - k_3) W + c_{11}) b_3 - W h_1 a_3) c_2 + W^2 k_1 a_2^3 b_3^2) \sin(\theta) + (((W f_3 + c_{31}) b_3 - W h_3 a_3) \\
 & c_2^2 + (((f_1 - 2k_3) W + c_{11}) b_3 - W h_1 a_3) a_2 c_2 - 2W k_1 a_2^2 b_3) b_3 c_2 r) \sqrt{-b_3 c_2} - c_2 \cos(\theta) (((-b_3^2 \\
 & + (g_2 - h_3) b_3 + g_1 a_3) c_2 - b_3(a_2 h_1 - a_3 k_1 - b_3 k_2)) b_3 c_2^2 r^2 \cos^2(\theta) + b_3 c_2 r((e_3 + a_3) b_3 - \\
 & 2g_3 a_3) W c_2^2 + (-W(f_2 + a_2) b_3^2 + (((e_1 - h_3) a_2 - a_3(f_1 - h_2)) W + b_{11} a_2 - c_{11} a_3) b_3 + (- \\
 & 2a_2 a_3 g_1 + a_3^2 h_1) W) c_2 - W a_2 b_3(a_2 h_1 - 2a_3 k_1 - 2b_3 k_2)) \sin(\theta) + r^2 b_3^2 (h_3 + b_3) c_2^3 + ((-W^2 \\
 & d_2 - r^2 k_2) b_3^3 + (a_3(e_2 - d_1) W^2 - a_3(a_{11} - b_{21}) W + r^2(a_2 h_1 - a_3 k_1)) b_3^2 + W a_3^2((e_1 - g_2) \\
 & W + b_{11}) b_3 - W^2 g_1 a_3^3) c_2^2 + (W f_2 b_3^2 + ((f_1 - h_2) W + c_{11}) a_3 b_3 - W h_1 a_3^2) W a_2 b_3 c_2 - W^2 \\
 & a_2^2 b_3^2 (a_3 k_1 + b_3 k_2)) = F_1(\theta, r, W),
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \dot{W} = & -\frac{\varepsilon}{c_2^3 b_3^3} (((a_2^2 k_1 - a_2 c_2 f_1 + c_2^2 d_1) b_3^2 + a_3 c_2 (a_2 h_1 - c_2 e_1) b_3 + a_3^2 c_2^2 g_1) W^2 - c_2 (r((a_3 h_1 - b_3 f_1) \\
 & c_2 + 2k_1 a_2 b_3) b_3 \sin \theta + r((2a_3 g_1 - b_3 e_1) c_2 + h_1 a_2 b_3) \sqrt{-b_3 c_2} \cos \theta + (a_3 b_3 b_{11} - a_{11} b_3^2) c_2 + \\
 & a_2 b_3^2 c_{11}) W + r b_3 c_2^2 (-r(b_3 k_1 + c_2 g_1) \cos^2 \theta + \cos \theta (r \sin \theta h_1 + b_{11}) \sqrt{-b_3 c_2} + b_3 (r k_1 + c_{11} \\
 & \sin \theta))) = F_2(\theta, r, W).
 \end{aligned} \tag{3.12}$$

Le système différentiel (3.12) est écrit dans la forme normale (3.3), prêt à être appliqué à La théorie de moyennisation de la section 3.2, où $\mathbf{x} = (r, W)$, $t = \theta$, $T = 2\pi$,

$$\begin{pmatrix} \dot{r} \\ \dot{W} \end{pmatrix} = F(\theta, r, W) = \begin{pmatrix} F_1(\theta, r, W) \\ F_2(\theta, r, W) \end{pmatrix}, \quad \text{et} \quad f(r, W) = \begin{pmatrix} f_1(r, W) \\ f_2(r, W) \end{pmatrix}. \tag{3.13}$$

Il est immédiat de vérifier que le système (3.12) satisfait toutes les hypothèses du Théorème 3.2.1. Maintenant, nous calculons les intégrales (3.5), c'est-à-dire

$$\begin{aligned}
 f_1(r, W) &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} F_1(\theta, r, W) d\theta = \frac{r \sqrt{-c_2 b_3}}{2c_2^3 b_3^3} (T_1 W + N_1), \\
 f_2(r, W) &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} F_2(\theta, r, W) d\theta = -\frac{\sqrt{-c_2 b_3}}{2c_2^3 b_3^3} (D_1 W^2 + R_1 r^2 + C_1 W).
 \end{aligned}$$

Le système $f_1(r, W) = f_2(r, W) = 0$ a une unique solution (r^*, W^*) avec $r^* > 0$, à savoir

$$(r^*, W^*) = \left(\frac{1}{T_1} \sqrt{\frac{C_1 N_1 T_1 - D_1 N_1^2}{R_1}}, -\frac{N_1}{T_1} \right),$$

si $T_1 > 0$, $R_1(C_1 N_1 T_1 - D_1 N_1^2) > 0$, et le Jacobien (3.6) en (r^*, W^*) prend la valeur $J = N_1(N_1 D_1 - C_1 T_1) / (2c_2^5 b_3^5 T_1) \neq 0$ où

$$N_1 = -(((b_{21} + c_{31})c_2 + a_2 c_{11})b_3 + a_3 b_{11} c_2) c_2 b_3,$$

$$C_1 = -2c_2((a_3 b_{11} - a_{11} b_3) c_2 + a_2 b_3 c_{11}) b_3,$$

$$T_1 = ((-e_2 - f_3) c_2^2 + a_2 (h_2 + 2k_3 - f_1) c_2 + 2a_2^2 k_1) b_3^2 + ((2g_2 + h_3 - e_1) c_2 + 2a_2 h_1) c_2 a_3 b_3 + 2c_2^2 a_3^2 g_1,$$

$$D_1 = (2a_2^2 k_1 - 2a_2 c_2 f_1 + 2c_2^2 d_1) b_3^2 + 2a_3 c_2 (a_2 h_1 - c_2 e_1) b_3 + 2c_2^2 a_3^2 g_1,$$

$$R_1 = b_3 c_2^2 (b_3 k_1 - c_2 g_1).$$

Alors, le Théorème 3.2.1 garantit pour $\varepsilon > 0$ suffisamment petit l'existence d'une solution périodique $(r(\theta, \varepsilon), W(\theta, \varepsilon))$ du système (3.12) telle que $(r(0, \varepsilon), W(0, \varepsilon)) \rightarrow (r^*, W^*)$ lorsque $\varepsilon \rightarrow 0$.

Ainsi, pour $\varepsilon > 0$ suffisamment petit, le système (3.11) a la solution périodique $(r(t, \varepsilon), \theta(t, \varepsilon), W(t, \varepsilon))$ avec $\theta(t, \varepsilon) = \sqrt{-b_3 c_2} t + O(\varepsilon)$, telle que $(r(0, \varepsilon), \theta(0, \varepsilon), W(0, \varepsilon)) \rightarrow (r^*, 0, W^*)$ lorsque $\varepsilon \rightarrow 0$.

Par conséquent, le système (3.10) a la solution périodique

$$(U(t, \varepsilon), V(t, \varepsilon), W(t, \varepsilon)) = (r^* \cos(\sqrt{-b_3 c_2} t) + O(\varepsilon), r^* \sin(\sqrt{-b_3 c_2} t) + O(\varepsilon), W^* + O(\varepsilon)),$$

pour $\varepsilon > 0$ suffisamment petit. Par conséquent, le système (3.9) pour $\varepsilon > 0$ suffisamment petit a la solution périodique

$$(u(t, \varepsilon), v(t, \varepsilon), w(t, \varepsilon)) = (\varepsilon r^* \cos(\sqrt{-b_3 c_2} t) + O(\varepsilon^2), \varepsilon r^* \sin(\sqrt{-b_3 c_2} t) + O(\varepsilon^2), \varepsilon W^* + O(\varepsilon^2)). \quad (3.14)$$

Enfin, pour $\varepsilon > 0$ suffisamment petit, le système (3.7) a la solution périodique $(X(t, \varepsilon), Y(t, \varepsilon), Z(t, \varepsilon))$ obtenue à partir de (3.14) grâce au changement de variables (3.8). Cette solution périodique tend vers l'origine des coordonnées lorsque $\varepsilon \rightarrow 0$. Par conséquent, il existe une solution périodique partant du point d'équilibre de zéro-Hopf $(1, 1, 1)$ lorsque $\varepsilon = 0$. Ceci achève la preuve du Théorème 3.1.1 sous la condition (i).

Exemple 1. Considérons le système de Kolmogorov

$$\begin{aligned} \dot{x} &= x(x - 3 + y + z + (x - 1)^2 + (x - 1)(y - 1) + (z - 1)^2), \\ \dot{y} &= y(x - 3 + y + z + (x - 1)^2 + (x - 1)(z - 1) + (y - 1)^2 + (z - 1)^2), \\ \dot{z} &= z(x - 1 - y + z + (x - 1)^2 + (y - 1)^2 + (y - 1)(z - 1) + (z - 1)^2). \end{aligned} \quad (3.15)$$

Ce système dans les nouvelles variables (X, Y, Z) s'écrit

$$\begin{aligned} \dot{X} &= (X + 1)(X^2 + XY + Z^2 + (X - Z)\varepsilon), \\ \dot{Y} &= (Y + 1)(X^2 + XZ + Y^2 + Z^2 + X + Z), \\ \dot{Z} &= (Z + 1)(X^2 + Y^2 + YZ + Z^2 + X - Y). \end{aligned}$$

Le système correspondant associé au système différentiel (3.13) a sa fonction $F(\theta, r, W)$ avec les composantes

$$F_1(\theta, r, W) = -r^2 \cos^3 \theta + (1 + 4W)r \cos^2 \theta + (r(-5W - 1) \sin \theta + W^2 + 2W) \cos \theta + (5W^2 + 2r^2 + 2W) \sin \theta + (-3W - 1)r,$$

$$F_2(\theta, r, W) = -r^2 \cos^2 \theta - \cos \theta W r - r(2W + 1) \sin \theta + 3W^2 + r^2 + 2W.$$

Pour rechercher les cycles limites, nous devons résoudre le système donné par la fonction moyennée $f(r, W) = (f_1(r, W), f_2(r, W)) = (0, 0)$ où

$$f_1(r, W) = \frac{-r(2W + 1)}{2}, \quad f_2(r, W) = 3W^2 + \frac{1}{2}r^2 + 2W.$$

Ce système a quatre solutions pour (r, W) données par $(0, 0)$, $(0, -2/3)$, $(\sqrt{2}/2, -1/2)$, $(-\sqrt{2}/2, -1/2)$. La solution $(0, 0)$ ne fournit aucune orbite périodique car elle correspond au point d'équilibre localisé à l'origine. Il y a deux bonnes solutions fournies par La théorie de moyennisation du premier ordre, $(0, -2/3)$ et $(\sqrt{2}/2, -1/2)$. Puisque les déterminants (3.6) à ces deux solutions sont $-1/3$ et $1/2$ et donc non nuls, respectivement, le système de Kolmogorov (3.15) a deux cycles limites bifurquant de l'origine fournis par La théorie de moyennisation du premier ordre. Nous traçons ces deux cycles limites pour $\varepsilon = 10^{-5}$ dans la Figure 3.1, où nous fournissons les

conditions initiales des deux cycles limites que nous avons tracés. Le logiciel utilisé pour réaliser toutes les figures est Maple 20.

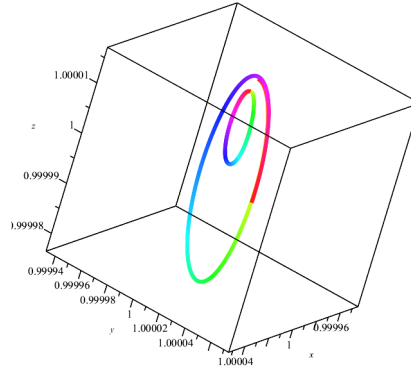


FIGURE 3.1: 1^{er} CL : $X(0) = \varepsilon/3 + 1$, $Y(0) = \varepsilon/3 + 1$, $Z(0) = 5\varepsilon/3 + 1$.

$$2^{\text{ème}} \text{ CL : } X(0) = 1 - \varepsilon/2, Y(0) = 1 - \varepsilon(\sqrt{2} + 1)/2, Z(0) = 1 + \varepsilon/2.$$

Puisque les valeurs propres de la matrice jacobienne de (f_1, f_2) aux points singuliers $(0, -2/3)$ et $(\sqrt{2}/2, -1/2)$ sont respectivement $(-2, 1/6)$ et $(-1 \pm i)/2$, par le Théorème 3.2.1, les cycles limites sont respectivement instable et stable. En revenant à travers les changements de variables comme nous l'avons fait dans la preuve du Théorème 3.1.1, nous obtenons que les cycles limites bifurquant du point d'équilibre $(1, 1, 1)$ du système (3.15) sont respectivement

$$\begin{aligned} (x(t, \varepsilon), y(t, \varepsilon), z(t, \varepsilon)) &= (1 - 2\varepsilon/3 + O(\varepsilon^2), 1 - 2\varepsilon/3 + O(\varepsilon^2), 1 + 2\varepsilon/3 + O(\varepsilon^2)), \text{ et} \\ (x(t, \varepsilon), y(t, \varepsilon), z(t, \varepsilon)) &= (1 - \varepsilon/2 + O(\varepsilon^2), 1 - \varepsilon(\sqrt{2} \cos t + 1)/2 + O(\varepsilon^2), 1 + \varepsilon(\sqrt{2} \sin t + 1)/2 \\ &\quad + O(\varepsilon^2)). \end{aligned}$$

Preuve 3 (Preuve du Théorème 3.1.1 sous la condition (ii)) Nous considérons maintenant le système de Kolmogorov (3.2) perturbé avec les paramètres donnés dans la condition (ii). Nous translatons le point d'équilibre $(1, 1, 1)$ à l'origine des coordonnées en effectuant le changement de variables $x = X + 1, y = Y + 1, z = Z + 1$. Alors le système (3.2) devient

$$\begin{aligned} \dot{X} &= (X + 1)(d_1 X^2 + e_1 XY + f_1 XZ + g_1 Y^2 + h_1 YZ + k_1 Z^2 - b_{20} X + b_1 Y + (-2Xb_{21} + Zc_{11})\varepsilon), \\ \dot{Y} &= (Y + 1)(d_2 X^2 + e_2 XY + f_2 XZ + g_2 Y^2 + h_2 YZ + k_2 Z^2 + a_2 X + b_{20} Y + (Yb_{21} + Zc_{21})\varepsilon), \\ \dot{Z} &= (Z + 1)(X^2 d_3 + XY e_3 + XZ f_3 + Y^2 g_3 + YZ h_3 + Z^2 k_3 + Z\varepsilon c_{31} + Xa_3 + Yb_3). \end{aligned} \quad (3.16)$$

Nous écrivons la partie linéaire du système (3.16) avec $\varepsilon = 0$ au point d'équilibre $(0, 0, 0)$ dans sa forme normale de Jordan réelle

$$\begin{pmatrix} 0 & -\sqrt{-a_2 b_1 - b_{20}^2} & 0 \\ \sqrt{-a_2 b_1 - b_{20}^2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \text{ tel que } a_2 b_1 + b_{20}^2 < 0.$$

Pour cela, nous effectuons le changement de variables

$$\begin{pmatrix} u \\ v \\ w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{b_{20}}{b_1 \sqrt{-A_2}} & \frac{1}{\sqrt{-A_2}} & 0 \\ \frac{1}{b_1} & 0 & 0 \\ \frac{S_2}{A_2} & -\frac{P_2}{A_2} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \end{pmatrix},$$

avec inverse

$$\begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & b_1 & 0 \\ \sqrt{-A_2} & b_{20} & 0 \\ -\frac{P_2}{\sqrt{-A_2}} & b_3 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ v \\ w \end{pmatrix},$$

où $A_2 = a_2b_1 + b_{20}^2$, $P_2 = a_3b_1 + b_{20}b_3$, $S_2 = -a_2b_3 + a_3b_{20}$. En suivant maintenant les mêmes étapes que dans le cas du Théorème 3.1.1 sous la condition (i), nous obtenons le système

$$\begin{aligned} \dot{r} &= \frac{\varepsilon}{A_2^2 b_1} (\sqrt{-A_2} r \cos^2 \theta \sin^2 \theta (A_2 (h_1 (b_{20} b_3 + P_2) + 2b_{20}^2 g_1 - b_1^2 (a_2 - b_{20} + e_2) - b_1 (b_{20} (2b_{20} - e_1 + 2g_2) + h_2 b_3)) + P_2 b_{20}^2 h_1 + ((f_1 - h_2) b_1 + 2b_3 k_1) P_2 b_{20} - (b_1 f_2 + 2b_3 k_2) b_1 P_2 + A_2^2 g_1 + P_2^2 k_1) + r A_2 \cos \theta \sin \theta (W(((f_1 - h_2) b_{20} - 2b_3 k_2) b_1 + (b_{20}^2 + A_2) h_1 - b_1^2 f_2 + 2k_1 (b_{20} b_3 + P_2)) + (a_3 c_{11} - 3b_{20} b_{21} - b_3 c_{21}) b_1 + 2b_{20} b_3 c_{11}) + r^2 A_2 \cos \theta \sin^2 \theta (P_2 (b_1 f_1 + b_{20} h_1 + 2b_3 k_1) + A_2 (b_1^2 + b_1 e_1 + 2b_{20} g_1 + b_3 h_1) - b_1^3 d_2 + ((-e_2 - a_2 + d_1) b_{20} - f_2 b_3) b_1^2 + (-b_{20}^3 + (e_1 - g_2) b_{20}^2 - b_3 (h_2 - f_1) b_{20} - k_2 b_3^2) b_1 + b_{20} (b_{20}^2 g_1 + b_{20} b_3 h_1 + b_3^2 k_1)) + (-A_2)^{\frac{3}{2}} \sin \theta W (W k_1 + c_{11}) + \sin^3 \theta (-A_2)^{\frac{3}{2}} r^2 (b_3^2 k_1 + (b_1 f_1 + b_{20} h_1) b_3 + b_1^2 d_1 + b_1 b_{20} e_1 + b_{20}^2 g_1) + r (-A_2)^{\frac{3}{2}} \sin^2 \theta (W (b_1 f_1 + b_{20} h_1 + 2b_3 k_1) - 2b_1 b_{21} + b_3 c_{11}) - r \sqrt{-A_2} \cos^2 \theta (((2b_1 k_2 - 2b_{20} k_1) P_2 + (b_1 h_2 - b_{20} h_1) A_2) W + (b_1 c_{21} - b_{20} c_{11}) P_2 + A_2 b_1 b_{21}) + r^2 \cos^3 \theta (((b_{20} + g_2) b_1 - b_{20} g_1) A_2^2 + P_2 (b_1 h_2 - b_{20} h_1) A_2 + (b_1 k_2 - b_{20} k_1) P_2^2) - A_2 \cos \theta W ((W k_2 + c_{21}) b_1 - b_{20} (W k_1 + c_{11}))) \\ &= F_1(\theta, r, W), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \dot{W} &= -\frac{\varepsilon}{A_2^2 \sqrt{-A_2}} (-r \sin^2 \theta \cos \theta ((e_3 b_1 + 2g_3 b_{20} + b_3 (h_3 + b_3)) A_2^2 + (((-e_2 + f_3 - a_2 + a_3) b_1 - 2b_{20}^2 + (b_3 - 2g_2 + h_3) b_{20} - b_3 (h_2 - 2k_3)) P_2 + S_2 (b_1^2 + b_1 e_1 + 2b_{20} g_1 + b_3 h_1)) A_2 + (S_2 (b_1 f_1 + b_{20} h_1 + 2b_3 k_1) - P_2 (b_1 f_2 + b_{20} h_2 + 2b_3 k_2)) P_2) \sqrt{-A_2} - r A_2 \sin \theta (W (((f_3 + a_3) b_1 + (h_3 + b_3) b_{20} + 2k_3 b_3) A_2 + S_2 (b_1 f_1 + b_{20} h_1 + 2b_3 k_1) - P_2 (b_1 f_2 + b_{20} h_2 + 2b_3 k_2)) + A_2 b_3 c_{31} - S_2 (2b_1 b_{21} - b_3 c_{11}) - P_2 (b_{20} b_{21} + b_3 c_{21})) - r^2 A_2 \sin^2 \theta (A_2 ((k_3 + b_{20}) b_3^2 + ((f_3 + a_3) b_1 + b_{20} h_3) b_3 + b_1^2 d_3 + b_1 b_{20} e_3 + b_{20}^2 g_3) + S_2 (b_3^2 k_1 + (b_1 f_1 + b_{20} h_1) b_3 + b_1^2 d_1 + b_1 b_{20} e_1 + b_{20}^2 g_1) - P_2 (b_{20}^3 + b_{20}^2 g_2 + ((a_2 + e_2) b_1 + h_2 b_3) b_{20} + k_2 b_3^2 + b_1^2 d_2 + b_1 b_3 f_2)) + r^2 \cos^2 \theta (A_2^3 g_3 + ((h_3 - b_{20} + b_3 - g_2) P_2 + S_2 g_1) A_2^2 + P_2 ((-h_2 + k_3) P_2 + h_1 S_2) A_2 + P_2^2 (S_2 k_1 - P_2 k_2)) - \cos \theta \sqrt{-A_2} r ((A_2^2 (h_3 + b_3) + A_2 (h_1 S_2 - P_2 (h_2 - 2k_3)) + 2P_2 (S_2 k_1 - P_2 k_2)) W - A_2 P_2 (b_{21} - c_{31}) + P_2 (S_2 c_{11} - P_2 c_{21})) - (A_2^2 k_3 + A_2 (S_2 k_1 - P_2 k_2)) W^2 - (A_2^2 c_{31} + A_2 (S_2 c_{11} - P_2 c_{21})) W) = F_2(\theta, r, W). \end{aligned}$$

(3.17)

Dans ce cas, les intégrales (3.5) sont

$$\begin{aligned} f_1(r, W) &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} F_1(\theta, r, W) d\theta = -\frac{r(T_2 W + N_2)}{2(-A_2)^{\frac{3}{2}} b_1}, \\ f_2(r, W) &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} F_2(\theta, r, W) d\theta = -\frac{D_2 W^2 + R_2 r^2 + C_2 W}{2(-A_2)^{\frac{5}{2}}}. \end{aligned}$$

Le système $f_1(r, W) = f_2(r, W) = 0$ a une solution unique (r^*, W^*) avec $r^* > 0$, à savoir

$$(r^*, W^*) = \left(\frac{1}{T_2} \sqrt{\frac{C_2 N_2 T_2 - D_2 N_2^2}{R_2}}, -\frac{N_2}{T_2} \right),$$

si $T_2 > 0$, $R_2(C_2 N_2 T_2 - D_2 N_2^2) > 0$ et le Jacobien (3.6) en (r^*, W^*) est $-N_2(C_2 T_2 - N_2 D_2)/(2A_2^4 T_2 b_1) \neq 0$, où

$$N_2 = -A_2(b_1 b_{21} - b_3 c_{11}) + P_2(b_1 c_{21} - b_{20} c_{11}),$$

$$C_2 = -2A_2(A_2 c_{31} + S_2 c_{11} - P_2 c_{21})$$

$$D_2 = -2A_2(A_2 k_3 + S_2 k_1 - P_2 k_2),$$

$$T_2 = A_2(b_1(f_1 + h_2) + 2b_3 k_1) + 2P_2 b_1 k_2 - 2P_2 b_{20} k_1,$$

$$\begin{aligned} R_2 = & A_2^2((-k_3 - b_{20})b_3^2 + ((-a_3 - f_3)b_1 - b_{20}h_3)b_3 - b_1^2 d_3 - b_1 b_{20} e_3 - b_{20}^2 g_3 + S_2 g_1 - P_2(b_{20} - \\ & b_3 + g_2 - h_3)) + A_2(-S_2(b_3^2 k_1 + (b_1 f_1 + b_{20} h_1)b_3 + b_1^2 d_1 + b_1 b_{20} e_1 + b_{20}^2 g_1) + P_2(b_1(b_{20}(\\ & a_2 + e_2) + b_3 f_2) + b_{20}^2(b_{20} + g_2) + b_1^2 d_2 + b_{20} b_3 h_2 + b_3^2 k_2 + S_2 h_1) - P_2^2(h_2 - k_3)) + A_2^3 g_3 \\ & + P_2^2(S_2 k_1 - P_2 k_2), \end{aligned}$$

alors, par le Théorème 3.2.1, pour $\varepsilon > 0$ suffisamment petit, le système (3.16) a une solution périodique $(X(t, \varepsilon), Y(t, \varepsilon), Z(t, \varepsilon))$ tendant vers $(0, 0, 0)$ lorsque $\varepsilon \rightarrow 0$. Par conséquent, il existe une solution périodique partant du point d'équilibre zéro-Hopf $(1, 1, 1)$ lorsque $\varepsilon = 0$. Cela complète la preuve du Théorème 3.1.1 sous la condition (ii).

Exemple 2. Considérons le système de Kolmogorov

$$\begin{aligned} \dot{x} &= x(x - 3 + y + z + (x - 1)^2 + (x - 1)(y - 1) + (z - 1)^2), \\ \dot{y} &= y(-2x + y + z + (x - 1)^2 + (x - 1)(z - 1) + (y - 1)^2 + (z - 1)^2), \\ \dot{z} &= z(x - 1 - y + z + (x - 1)^2 + (y - 1)^2 + (y - 1)(z - 1) + (z - 1)^2). \end{aligned} \quad (3.18)$$

Ce système dans les variables (X, Y, Z) s'écrit

$$\begin{aligned} \dot{X} &= (X + 1)(X^2 + XY + Z^2 - Z\varepsilon - X + Y), \\ \dot{Y} &= (Y + 1)(X^2 + XZ + Y^2 + Z^2 + Z\varepsilon - 2X + Y), \\ \dot{Z} &= (Z + 1)(X^2 + Y^2 + YZ + Z^2 - 3Z\varepsilon + X - Y). \end{aligned}$$

Le système correspondant (3.17) est

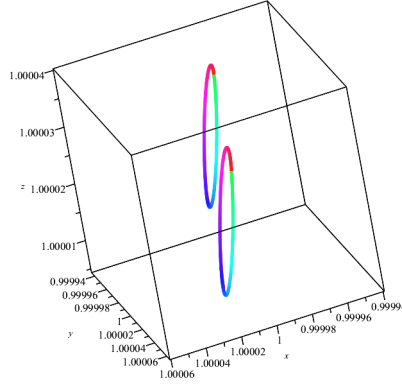
$$\begin{aligned} F_1(\theta, r, W) &= -r \cos \theta \sin \theta (-W + 2) + W \sin \theta (W - 1) + 3r^2 \sin^3 \theta + r \sin^2 \theta (-2W + 1) + \\ & 2r^2 \cos^3 \theta + 2 \cos \theta W, \end{aligned}$$

$$F_2(\theta, r, W) = 4r^2 \sin \theta \cos \theta - r \sin \theta (3W - 4) + 5r^2 \sin^2 \theta + r^2 \cos^2 \theta + 2W^2 - 4W.$$

Pour rechercher les cycles limites, nous devons résoudre le système

$$f_1(r, W) = -\frac{r(2W - 1)}{2} = 0, \quad f_2(r, W) = 2W^2 + 3r^2 - 4W = 0.$$

Ce système possède les solutions (r, W) données par $(0, 0)$, $(0, 2)$, $(\sqrt{2}/2, 1/2)$, $(-\sqrt{2}/2, 1/2)$. Comme dans l'exemple 1, nous avons deux bonnes solutions, $(0, 2)$ et $(\sqrt{2}/2, 1/2)$. Les déterminants (3.6) à ces solutions sont respectivement -6 et 3 . Par conséquent, le système (3.18) a deux cycles limites bifurquant du point d'équilibre $(1, 1, 1)$ en utilisant la théorie de moyennisation du premier ordre. Nous représentons ces deux cycles limites bifurqués pour $\varepsilon = 10^{-5}$ dans la Figure 3.2.


 FIGURE 3.2: 1^{er} CL : $X(0) = \varepsilon + 1$, $Y(0) = \varepsilon + 1$, $Z(0) = 2\varepsilon + 1$.

 2^{ème} CL : $X(0) = 1 + \varepsilon$, $Y(0) = 1 + \varepsilon\sqrt{2}/2$, $Z(0) = 1 + \varepsilon/2$.

Les valeurs propres de la matrice jacobienne de (f_1, f_2) aux points singuliers $(0, 2)$ et $(\sqrt{2}/2, 1/2)$ sont respectivement $(4, -3/2)$ et $(-1 \pm i\sqrt{2})$. Par le Théorème 3.2.1, les cycles limites sont respectivement instable et stable.

Preuve 4 (Preuve du Théorème 3.1.1 sous la condition (iii)) Nous considérons maintenant le système de Kolmogorov (3.2) perturbé avec les paramètres donnés dans la condition (iii). Nous translatons le point d'équilibre $(1, 1, 1)$ à l'origine des coordonnées et le système (3.2) devient

$$\begin{aligned} \dot{X} &= (X + 1)((Xa_{11} + Yb_{11} + Zc_{11})\varepsilon + d_1X^2 + e_1XY + f_1XZ + g_1Y^2 + h_1YZ + k_1Z^2), \\ \dot{Y} &= (Y + 1)(X^2d_2 + XYe_2 + XZf_2 + Y^2g_2 + YZh_2 + Y\varepsilon b_{21} + Z^2k_2 + Xa_2 + Yb_{20} + Zc_2), \\ \dot{Z} &= (Z + 1)(X^2d_3 + XYe_3 + XZf_3 + Y^2g_3 + YZh_3 + Z^2k_3 - Z\varepsilon b_{21} + Xa_3 + Yb_3 - Zb_{20}). \end{aligned} \quad (3.19)$$

Nous écrivons la partie linéaire du système (3.19) avec $\varepsilon = 0$ au point d'équilibre $(0, 0, 0)$ dans sa forme normale de Jordan réelle

$$\begin{pmatrix} 0 & -\sqrt{-b_{20}^2 - b_3c_2} & 0 \\ \sqrt{-b_{20}^2 - b_3c_2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \text{ tel que } b_{20}^2 + b_3c_2 < 0.$$

Pour cela, nous effectuons le changement de variables

$$\begin{pmatrix} u \\ v \\ w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{P_3}{A_3} & -1 & 0 \\ \frac{a_2}{\sqrt{-A_3}} & \frac{b_{20}}{\sqrt{-A_3}} & \frac{c_2}{\sqrt{-A_3}} \\ \frac{1}{A_3} & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \end{pmatrix},$$

avec inverse

$$\begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & A_3 \\ -1 & 0 & P_3 \\ \frac{b_{20}}{c_2} & \frac{\sqrt{-A_3}}{c_2} & L_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ v \\ w \end{pmatrix},$$

où $A_3 = b_{20}^2 + b_3c_2$, $P_3 = -a_2b_{20} - a_3c_2$, $L_3 = -a_2b_3 + a_3b_{20}$. En suivant les mêmes étapes que

dans le cas du Théorème 3.1.1 sous la condition (i), nous obtenons le système

$$\begin{aligned}
 \dot{r} = & \frac{\varepsilon}{A_3 c_2^2 \sqrt{-A_3}} (-\sqrt{-A_3} r^2 \cos^2 \theta \sin \theta ((-2b_{20}k_1 + c_2h_1)P_3 + (2b_{20}k_2 - c_2^2 - c_2h_2)A_3 + (k_2 - \\
 & c_2)b_{20}^3 + ((-h_2 + k_3)c_2 + a_2k_1)b_{20}^2 - c_2((-g_2 + h_3 + b_3)c_2 + a_2h_1)b_{20} + a_2c_2^2g_1 + c_2^3g_3) + \\
 & A_3r^2 \cos \theta \sin^2 \theta ((-h_3 - b_{20} - b_3)c_2^2 + (-2b_{20}^2 + (-h_2 + 2k_3)b_{20} - a_2h_1)c_2 + 2a_2b_{20}k_1 + \\
 & 2b_{20}^2k_2 + A_3k_2 - P_3k_1) - c_2\sqrt{-A_3}r \cos \theta \sin \theta ((A_3^2f_2 + (-c_2^2e_3 + ((-e_2 + f_3 - a_2 + a_3)b_{20} \\
 & - a_2e_1 + P_3)c_2 + b_{20}^2f_2 + f_1a_2b_{20} + (-f_1 + h_2)P_3 + 2L_3k_2)A_3 + ((-h_3 - b_{20} - b_3)c_2^2 + (- \\
 & 2b_{20}^2 + (-h_2 + 2k_3)b_{20} - a_2h_1)c_2 + 2a_2b_{20}k_1 + 2b_{20}^2k_2 - 2P_3k_1)L_3 - h_1P_3^2 + ((-c_2 + h_2) \\
 & b_{20}^2 + ((b_3 - 2g_2 + h_3)c_2 + a_2h_1)b_{20} - 2a_2c_2g_1 - 2g_3c_2^2)P_3)W - (a_2b_{11} + 2b_{20}b_{21})c_2 - c_{11}(- \\
 & -a_2b_{20} + P_3)) + c_2r \cos^2 \theta (((a_2c_2 - b_{20}f_2 + c_2e_2)A_3^2 + (L_3c_2^2 + ((-e_1 + 2g_2 + b_{20})P_3 + h_2 \\
 & L_3)c_2 - b_{20}((-f_1 + h_2)P_3 + 2L_3k_2))A_3 + P_3((2b_{20}k_1 - c_2h_1)L_3 + P_3(b_{20}h_1 - 2c_2g_1)))W \\
 & + (b_{20}c_{11} - b_{11}c_2)P_3 + A_3b_{21}c_2) + c_2A_3r \sin^2 \theta (((b_{20} + b_3 + h_3)c_2 + a_2h_1 + h_2b_{20})P_3 + ((\\
 & -2c_2 + 2k_2)b_{20} + 2a_2k_1 + 2c_2k_3)L_3 + ((f_3 + a_3)c_2 + f_1a_2 + f_2b_{20})A_3)W + a_2c_{11} - b_{21}c_2) \\
 & - r^2 \cos^3 \theta ((b_{20}^2k_2 - b_{20}c_2h_2 + c_2^2g_2)A_3 + (-b_{20}^2k_1 + b_{20}c_2h_1 - c_2^2g_1)P_3) + A_3\sqrt{-A_3}((-b_{20} \\
 & + k_3)c_2 + a_2k_1 + b_{20}k_2)r^2 \sin^3 \theta - c_2^2\sqrt{-A_3}W \sin \theta ((A_3^2(a_2d_1 + b_{20}d_2 + c_2d_3) + (((b_{20} + e_1 \\
 &)a_2 + b_{20}e_2 + c_2e_3)P_3 + ((f_3 + a_3)c_2 + f_1a_2 + f_2b_{20})L_3)A_3 + ((k_2 - c_2)b_{20} + c_2k_3 + a_2k_1) \\
 & L_3^2 + ((b_{20} + b_3 + h_3)c_2 + a_2h_1 + h_2b_{20})P_3L_3 + (a_2g_1 + b_{20}^2 + b_{20}g_2 + c_2g_3)P_3^2)W + (A_3a_{11} \\
 & + L_3c_{11} + P_3b_{11})a_2 - b_{21}(L_3c_2 - P_3b_{20})) - c_2^2W \cos \theta ((A_3^3d_2 + ((e_2 + a_2 - d_1)P_3 + f_2L_3) \\
 & A_3^2 + (L_3^2k_2 + (c_2 - f_1 + h_2)P_3L_3 + (-e_1 + g_2 + b_{20})P_3^2)A_3 - L_3^2P_3k_1 - L_3P_3^2h_1 - g_1P_3^3) \\
 & W - P_3(P_3b_{11} + (a_{11} - b_{21})A_3 + L_3c_{11}))) = F_1(\theta, rW), \\
 \dot{W} = & \frac{\varepsilon}{c_2^2 A_3 \sqrt{-A_3}} (r^2 \cos^2 \theta (b_{20}^2 k_1 - b_{20} c_2 h_1 + c_2^2 g_1) - A_3 r^2 k_1 \sin^2 \theta + \sin \theta \sqrt{-A_3} c_2 r ((A_3 f_1 + \\
 & 2L_3 k_1 + P_3 h_1)W + c_{11}) + \cos \theta \sqrt{-A_3} r^2 \sin \theta (2b_{20} k_1 - c_2 h_1) + c_2 r \cos \theta ((A_3 (b_{20} f_1 - c_2 e_1) \\
 & + (2b_{20} k_1 - c_2 h_1)L_3 + P_3 (b_{20} h_1 - 2c_2 g_1))W + b_{20} c_{11} - b_{11} c_2) + c_2^2 (P_3^2 g_1 + (A_3 e_1 + L_3 h_1) \\
 & P_3 + A_3^2 d_1 + A_3 L_3 f_1 + L_3^2 k_1)W^2 + (A_3 a_{11} + L_3 c_{11} + P_3 b_{11})c_2^2 W) = F_2(\theta, rW).
 \end{aligned} \tag{3.20}$$

Nous calculons les intégrales (3.5) et nous obtenons

$$f_1(r, W) = -\frac{r(T_3 W + N_3)}{2c_2(-A_3)^{\frac{3}{2}}}, \quad f_2(r, W) = -\frac{D_3 W^2 + R_3 r^2 + c_{30} W}{2c_2^2(-A_3)^{\frac{3}{2}}}.$$

Le système $f_1(r, W) = f_2(r, W) = 0$ a une solution unique (r^*, W^*) avec $r^* > 0$, à savoir

$$(r^*, W^*) = \left(\frac{1}{T_3} \sqrt{\frac{c_{30} N_3 T_3 - D_3 N_3^2}{R_3}}, -\frac{N_3}{T_3} \right),$$

si $T_3 > 0$, $R_3(c_{30} N_3 T_3 - D_3 N_3^2) > 0$ et le Jacobien (3.6) en (r^*, W^*) est $N_3(c_{30} T_3 - N_3 D_3) / (2c_2^3 A_3^3 T_3) \neq 0$, où

$$\begin{aligned}
 D_3 &= 2c_2^2(A_3(A_3 d_1 + L_3 f_1 + P_3 e_1) + g_1 P_3^2 + L_3(L_3 k_1 + P_3 h_1)), \\
 C_3 &= 2c_2^2(A_3 a_{11} + L_3 c_{11} + P_3 b_{11}), \\
 R_3 &= -c_2(b_{20} h_1 - c_2 g_1) - k_1(-b_{20}^2 + A_3),
 \end{aligned}$$

$$N_3 = (b_{20}c_{11} - b_{11}c_2)P_3 + A_3a_2c_{11},$$

$$T_3 = ((a_2 + a_3 + e_2 + f_3)c_2 + a_2f_1)A_3^2 + (((-e_1 + 2g_2 + h_3 + 2b_{20} + b_3)c_2 + a_2h_1 + b_{20}f_1)P_3 + (c_2^2 + (h_2 + 2k_3 - 2b_{20})c_2 + 2a_2k_1)L_3)A_3 + P_3((2b_{20}k_1 - c_2h_1)L_3 + P_3(b_{20}h_1 - 2c_2g_1)),$$

alors, par le Théorème 3.2.1, pour $\varepsilon > 0$ suffisamment petit et en revenant aux changements de variables, nous obtenons que le système différentiel (3.2) a une solution périodique $(x(t, \varepsilon), y(t, \varepsilon), z(t, \varepsilon))$ qui tend vers l'équilibre $(1, 1, 1)$ lorsque $\varepsilon \rightarrow 0$. Par conséquent, il existe une orbite périodique partant du point d'équilibre zéro-Hopf situé à $(1, 1, 1)$ lorsque $\varepsilon = 0$. Cela complète la preuve du Théorème 3.1.1 sous la condition (iii).

Exemple 3. Considérons le système de Kolmogorov

$$\begin{aligned} \dot{x} &= x(x - 3 + y + z + (x - 1)^2 + (x - 1)(y - 1) + (z - 1)^2), \\ \dot{y} &= y(-2x + 3 + y - 2z + (x - 1)^2 + (x - 1)(z - 1) + (y - 1)^2 + (z - 1)^2), \\ \dot{z} &= z(x - 3 + y + z + (x - 1)^2 + (y - 1)^2 + (y - 1)(z - 1) + (z - 1)^2). \end{aligned} \quad (3.21)$$

Ce système dans les nouvelles variables (X, Y, Z) ayant le point d'équilibre à l'origine des coordonnées s'écrit

$$\begin{aligned} \dot{X} &= ((X + 1)((-3X + Z)\varepsilon + X^2 + XY + Z^2), \\ \dot{Y} &= (Y + 1)(X^2 + XZ + Y^2 + Z^2 - 2X + Y - 2Z), \\ \dot{Z} &= (Z + 1)(X^2 + Y^2 + YZ + Z^2 + X + Y - Z). \end{aligned}$$

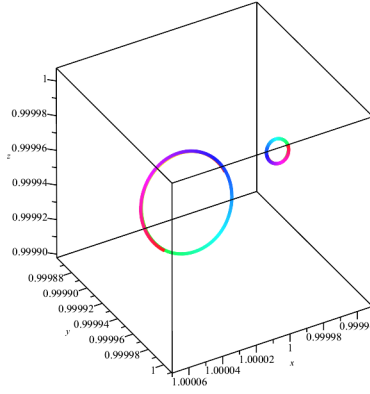
Les deux composantes du système correspondant (3.20) sont

$$\begin{aligned} F_1(\theta, r, W) &= \frac{1}{2}(r(W(37 \cos^2 \theta + 78 \cos \theta \sin \theta + 29 \sin^2 \theta) + 4 \cos^2 \theta + 6 \cos \theta \sin \theta + 2 \sin^2 \theta)) \\ &\quad - \frac{1}{4}(r^2(9 \cos^3 \theta + 19 \cos^2 \theta \sin \theta + 19 \cos \theta \sin^2 \theta + \sin^3 \theta)) + W \sin \theta(-65W - 12 \\ &\quad) + W \cos \theta(-47W - 24), \\ F_2(\theta, r, W) &= \frac{1}{2}(r \cos \theta(4W + 1) - r \sin \theta(r \cos \theta - 6W - 1)) - \frac{r^2}{4} - 6W^2 - 6W. \end{aligned}$$

Pour rechercher les cycles limites, nous devons résoudre le système

$$f_1(r, W) = \frac{r(33W + 3)}{2} = 0, \quad f_2(r, W) = -6W^2 - \frac{r^2}{4} - 6W = 0.$$

Ce système possède les solutions (r, W) données par $(0, 0)$, $(0, -1)$, $(4\sqrt{15}/11, -1/11)$, $(-4\sqrt{15}/11, -1/11)$. Comme dans l'exemple 1, nous avons deux bonnes solutions, $(0, -1)$ et $(4\sqrt{15}/11, -1/11)$. Les déterminants (3.6) à ces solutions sont respectivement -90 et $180/11$. Par conséquent, le système (3.21) a deux cycles limites bifurquant du point d'équilibre $(1, 1, 1)$ en utilisant la théorie de moyennisation du premier ordre. Nous représentons ces deux cycles limites bifurqués pour $\varepsilon = 10^{-5}$ dans la Figure 3.3.


 FIGURE 3.3: 1^{er} CL : $X(0) = 1 + 2\varepsilon$, $Y(0) = 1 - 3\varepsilon$, $Z(0) = 1 - 2\varepsilon$.

 2^{ème} CL : $X(0) = 1 + \varepsilon/11$, $Y(0) = 1 - 4(\sqrt{15} + 1)\varepsilon/11$, $Z(0) = 1 - (2\sqrt{15} + 3)\varepsilon/11$.

Les valeurs propres de la matrice jacobienne de (f_1, f_2) aux points singuliers $(4\sqrt{15}/11, -1/11)$ et $(0, -1)$ sont respectivement $(-27 \pm 3i\sqrt{139})/11$ et $(-15, 6)$. Par le Théorème 3.2.1, les cycles limites sont respectivement stable et instable.

Preuve 5 (Preuve du Théorème 3.1.1 sous la condition (iv)) Nous considérons maintenant le système de Kolmogorov (3.2) perturbé avec les paramètres donnés dans la condition (iv). Nous translatons le point d'équilibre $(1, 1, 1)$ à l'origine des coordonnées et le système (3.2) devient

$$\begin{aligned} \dot{X} &= (X + 1)((-2Xc_{31} + Yb_{11})\varepsilon + d_1X^2 + e_1XY + f_1XZ + g_1Y^2 + h_1YZ + k_1Z^2 - c_{30}X + c_1Z), \\ \dot{Y} &= (Y + 1)(X^2d_2 + XYe_2 + XZf_2 + Y^2g_2 + YZh_2 + Y\varepsilon b_{21} + Z^2k_2 + Xa_2 + Zc_2), \\ \dot{Z} &= (Z + 1)((Yb_{31} + Zc_{31})\varepsilon + d_3X^2 + e_3XY + f_3XZ + g_3Y^2 + h_3YZ + k_3Z^2 + a_3X + c_{30}Z). \end{aligned} \quad (3.22)$$

Nous écrivons la partie linéaire du système (3.22) avec $\varepsilon = 0$ au point d'équilibre $(0, 0, 0)$ dans sa forme normale de Jordan réelle

$$\begin{pmatrix} 0 & -\sqrt{-a_3c_1 - c_{30}^2} & 0 \\ \sqrt{-a_3c_1 - c_{30}^2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \text{ tel que } a_3c_1 + c_{30}^2 < 0.$$

Pour cela, nous effectuons le changement de variables

$$\begin{pmatrix} u \\ v \\ w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{c_{30}}{c_1\sqrt{-A_4}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{-A_4}} \\ \frac{1}{c_1} & 0 & 0 \\ \frac{K_4}{A_4} & A_4 & -M_4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \end{pmatrix},$$

avec inverse

$$\begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & c_1 & 0 \\ -\frac{M_4}{\sqrt{-A_4}} & c_2 & \frac{1}{A_4} \\ \frac{1}{\sqrt{-A_4}} & c_{30} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ v \\ w \end{pmatrix},$$

où $A_4 = a_3c_1 + c_{30}^2$, $M_4 = a_2c_1 + c_2c_{30}$, $K_4 = a_2c_{30} - a_3c_2$. En suivant les mêmes étapes que

dans le cas du Théorème 3.1.1 sous la condition (i), nous obtenons le système

$$\begin{aligned}
 \dot{r} &= \frac{\varepsilon}{A_4^4 c_1} (((a_3 - d_3)c_1^3 + (c_{30}^2 + (-a_3 - f_3 + d_1)c_{30} + e_1 a_2 - e_3 c_2 + f_1 a_3)c_1^2 + (-c_{30}^3 + (2f_1 - k_3)c_{30}^2 + ((2e_1 - h_3)c_2 + h_1 a_2 + 2k_1 a_3)c_{30} - g_3 c_2^2 + (2a_2 g_1 + a_3 h_1)c_2)c_1 + 3c_2^2 c_{30} g_1 + 3c_2 c_{30}^2 h_1 + 3c_{30}^3 k_1)A_4^3 r^2 \sin^2 \theta \cos \theta + A_4^2 \sqrt{-A_4} r^2 \cos^2 \theta \sin \theta (-A_4((a_3 - c_{30} + f_3)c_1^2 + (2c_{30}^2 + (2k_3 - f_1)c_{30} + c_2 h_3)c_1 - c_2 c_{30} h_1 - 2c_{30}^2 k_1) - M_4(c_1^2 e_3 + ((h_3 - e_1)c_{30} + 2c_2 g_3)c_1 - 2c_2 c_{30} g_1 - c_{30}^2 h_1) + A_4^2 k_1 + A_4 M_4 h_1 + M_4^2 g_1) + A_4^2 r \cos \theta \sin \theta ((-c_1^2 e_3 + ((-h_3 + e_1)c_{30} + 2a_2 g_1 + h_1 a_3 - 2c_2 g_3)c_1 + 2c_{30}^2 h_1 + 4c_2 c_{30} g_1)W + A_4((a_2 b_{11} - b_{31} c_2 - 3c_{30} c_{31})c_1 + 2b_{11} c_2 c_{30})) + A_4^2 (-A_4)^{\frac{3}{2}} r^2 \sin^3 \theta (c_{30}^2 k_1 + (c_1 f_1 + c_2 h_1)c_{30} + c_1^2 d_1 + c_1 c_2 e_1 + c_2^2 g_1) + \sin \theta (-A_4)^{\frac{3}{2}} W (A_4 b_{11} + W g_1) + A_4^2 r^2 \cos^3 \theta (A_4^2 (c_1 c_{30} + c_1 k_3 - c_{30} k_1) + A_4 M_4 (c_1 h_3 - c_{30} h_1) + M_4^2 (c_1 g_3 - c_{30} g_1)) + A_4 W \cos \theta (A_4 (b_{11} c_{30} - b_{31} c_1) - W (c_1 g_3 - c_{30} g_1)) - A_4 \cos^2 \theta \sqrt{-A_4} r ((A_4 (c_1 h_3 - c_{30} h_1) + 2M_4 (c_1 g_3 - c_{30} g_1))W + A_4^2 c_1 c_{31} - A_4 M_4 (b_{11} c_{30} - b_{31} c_1)) + A_4 \sin^2 \theta (-A_4)^{\frac{3}{2}} r (A_4 (b_{11} c_2 - 2c_1 c_{31}) + W (c_1 e_1 + 2c_2 g_1 + c_{30} h_1))) = F_1(\theta, r, W), \\
 \dot{W} &= -\frac{\varepsilon}{A_4^2 \sqrt{-A_4}} (-A_4 \sqrt{-A_4} r^2 \cos \theta \sin \theta (A_4^2 (c_1 f_2 + c_2^2 + c_2 h_2 + 2c_{30} k_2) + A_4 (K_4 (c_1^2 + c_1 f_1 + c_2 h_1 + 2c_{30} k_1) + M_4 ((a_2 - a_3 + e_2 - f_3)c_1 - 2c_{30}^2 + (-2k_3 + c_2 + h_2)c_{30} - c_2 (h_3 - 2g_2))) + K_4 M_4 (c_1 e_1 + 2c_2 g_1 + c_{30} h_1) - M_4^2 (c_1 e_3 + 2c_2 g_3 + c_{30} h_3)) - A_4 r \sin \theta ((A_4 ((a_2 + e_2)c_1 + (c_{30} + 2g_2)c_2 + c_{30} h_2) + K_4 (c_1 e_1 + 2c_2 g_1 + c_{30} h_1) - M_4 (c_1 e_3 + 2c_2 g_3 + c_{30} h_3))W + A_4^2 b_{21} c_2 + A_4 (K_4 (b_{11} c_2 - 2c_1 c_{31}) - M_4 (b_{31} c_2 + c_{30} c_{31}))) - A_4^2 r^2 \sin^2 \theta (A_4 ((c_{30} + g_2)c_2^2 + ((a_2 + e_2)c_1 + c_{30} h_2)c_2 + c_{30}^2 k_2 + c_1^2 d_2 + c_1 c_{30} f_2) + (c_{30}^2 k_1 + (c_1 f_1 + c_2 h_1)c_{30} + c_1^2 d_1 + c_1 c_2 e_1 + c_2^2 g_1)K_4 - (c_{30}^3 + k_3 c_{30}^2 + ((a_3 + f_3)c_1 + c_2 h_3)c_{30} + c_1^2 d_3 + c_1 c_2 e_3 + g_3 c_2^2)M_4) + A_4 r^2 \cos^2 \theta (A_4^3 k_2 + A_4^2 (K_4 k_1 + M_4 (c_2 - c_{30} + h_2 - k_3)) + M_4 A_4 (K_4 h_1 + M_4 (g_2 - h_3)) + K_4 M_4^2 g_1 - M_4^3 g_3) - \sqrt{-A_4} r \cos \theta ((A_4^2 (c_2 + h_2) + A_4 (K_4 h_1 + M_4 (2g_2 - h_3)) + 2K_4 M_4 g_1 - 2M_4^2 g_3)W + A_4^2 M_4 (b_{21} - c_{31}) + M_4 A_4 (K_4 b_{11} - M_4 b_{31})) + (-A_4 g_2 - K_4 g_1 + M_4 g_3)W^2 - (A_4^2 b_{21} + A_4 (K_4 b_{11} - M_4 b_{31}))W) = F_2(\theta, r, W).
 \end{aligned} \tag{3.23}$$

Alors

$$f_1(r, W) = \frac{r(T_4 W + N_4)}{2(-A_4)^{\frac{5}{2}} c_1}, \quad f_2(r, W) = -\frac{D_4 W^2 + R_4 r^2 + C_4 W}{2(-A_4)^{\frac{5}{2}}}.$$

Le système $f_1(r, W) = f_2(r, W) = 0$ admet une solution unique (r^*, W^*) avec $r^* > 0$, à savoir

$$(r^*, W^*) = \left(\frac{1}{T_4} \sqrt{\frac{C_4 N_4 T_4 - D_4 N_4^2}{R_4}}, -\frac{N_4}{T_4} \right),$$

si $T_4 > 0$, $R_4(C_4 N_4 T_4 - D_4 N_4^2) > 0$ et le Jacobien (3.6) en (r^*, W^*) est $-N_4(C_4 T_4 - N_4 D_4) / (2A_4^5 T_4 c_1) \neq 0$,

où

$$\begin{aligned} N_4 &= A_4^2(b_{11}c_2 - c_1c_{31}) - A_4M_4(b_{11}c_{30} - b_{31}c_1), \\ C_4 &= -2A_4(A_4b_{21} + K_4b_{11} - M_4b_{31}), \\ T_4 &= A_4(c_1e_1 + c_1h_3 + 2c_2g_1) + 2M_4(c_1g_3 - c_{30}g_1), \\ D_4 &= -2(A_4g_2 + K_4g_1 - M_4g_3), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} R_4 &= A_4^2((c_{30}^3 + k_3c_{30}^2 + ((a_3 + f_3)c_1 + h_3c_2)c_{30} + c_2^2g_3 + c_1^2d_3 + c_1c_2e_3 + K_4h_1)M_4 + M_4^2(g_2 - \\ &h_3) - (k_1c_{30}^2 + (c_1f_1 + c_2h_1)c_{30} + c_1^2d_1 + c_1c_2e_1 + c_2^2g_1)K_4) + A_4^3((-c_{30} - g_2)c_2^2 + ((-a_2 - \\ &e_2)c_1 - c_{30}h_2)c_2 - c_{30}^2k_2 - c_1^2d_2 - c_1c_{30}f_2 + K_4k_1 + M_4(c_2 - c_{30} + h_2 - k_3)) + A_4M_4^2(K_4 \\ &g_1 - M_4g_3) + A_4^4k_2, \end{aligned}$$

Alors, par le Théorème 3.2.1, pour $\varepsilon > 0$ suffisamment petit et en revenant à travers les changements de variables du système (3.22), il existe une solution périodique $(X(t, \varepsilon), Y(t, \varepsilon), Z(t, \varepsilon))$ qui tend vers l'équilibre $(0, 0, 0)$ lorsque $\varepsilon \rightarrow 0$. Ainsi, il existe une solution périodique partant du point d'équilibre de zéro-Hopf $(1, 1, 1)$ lorsque $\varepsilon = 0$. Cela achève la preuve du Théorème 3.1.1 sous la condition (iv).

Exemple 4. Considérons le système de Kolmogorov

$$\begin{aligned} \dot{x} &= x(x + y - 2z + (x - 1)^2 + (x - 1)(y - 1) + (z - 1)^2), \\ \dot{y} &= y(-2x + y + z + (x - 1)^2 + (x - 1)(z - 1) + (y - 1)^2 + (z - 1)^2), \\ \dot{z} &= z(x - 1 - y + z + (x - 1)^2 + (y - 1)^2 + 10(y - 1)(z - 1) - (z - 1)^2). \end{aligned} \quad (3.24)$$

Ce système dans les variables (X, Y, Z) s'écrit

$$\begin{aligned} \dot{X} &= (X + 1)(X^2 + XY + 6X\varepsilon + Z^2 - X - 2Z), \\ \dot{Y} &= (Y + 1)(X^2 + XZ + Y^2 + Z^2 - 2X + Z), \\ \dot{Z} &= (Z + 1)((Y - 3Z)\varepsilon + X^2 + Y^2 + 10YZ - Z^2 + X + Z). \end{aligned}$$

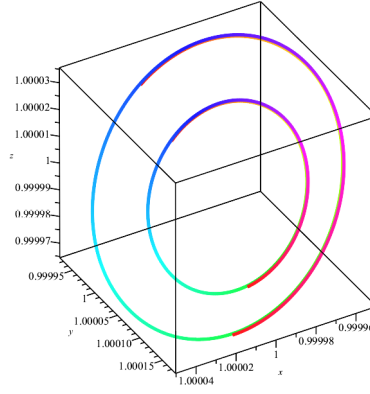
Les deux composantes du système correspondant associé au système (3.23) sont

$$\begin{aligned} F_1(\theta, r, W) &= \frac{1}{2}(((-22W - 16)r \sin \theta + 2W^2 + 13r^2 - 2W) \cos \theta - 3r^2 \sin \theta) - 31r^2 \cos^3 \theta + r \\ &(-43r \sin \theta + W - 14) \cos^2 \theta - r(W - 6), \\ F_2(\theta, r, W) &= 184r^2 \cos^2 \theta + (246r^2 \sin \theta + r(-9W + 40)) \cos \theta + r \sin \theta(61W + 46) - 6W^2 - \\ &83r^2 + 5W. \end{aligned}$$

Pour rechercher les cycles limites, nous devons résoudre le système

$$f_1(r, W) = -\frac{r(2W + 4)}{4} = 0, \quad f_2(r, W) = -6W^2 + 9r^2 + 5W = 0.$$

Ce système a pour solutions $(0, 0)$, $(0, 5/6)$, $(\sqrt{34}/3, -2)$, $(-\sqrt{34}/3, -2)$. Comme dans l'exemple 1, nous avons deux bonnes solutions, $(0, 5/6)$ et $(\sqrt{34}/3, -2)$. Les déterminants (3.6) en ces solutions sont respectivement $85/12$ et 34 . Ainsi, le système (3.24) possède deux cycles limites bifurquant à partir du point d'équilibre $(1, 1, 1)$ en utilisant La théorie de moyennisation au premier ordre. Nous traçons ces deux cycles limites bifurqués pour $\varepsilon = 10^{-5}$ dans la Figure 3.4.


 FIGURE 3.4: 1^{er} CL : $X(0) = 1 + \varepsilon$, $Y(0) = 1 - 5\varepsilon/6$, $Z(0) = 1 + \varepsilon$.

 2^{ème} CL : $X(0) = 1 + \varepsilon$, $Y(0) = 1 + (2 - 5\sqrt{34}/3)\varepsilon$, $Z(0) = 1 + \varepsilon\sqrt{34}/3$.

Les valeurs propres de la matrice jacobienne de (f_1, f_2) aux points singuliers $(\sqrt{34}/3, -2)$ et $(0, 5/6)$ sont respectivement $(29 \pm \sqrt{705})/2$ et $(-5, -17/2)$. Selon le Théorème 3.2.1, les cycles limites sont respectivement instable et stable.

Preuve 6 (Preuve du Théorème 3.1.1 sous la condition (v)) Nous considérons maintenant le système de Kolmogorov (3.2) perturbé avec les paramètres donnés dans la condition (v). Nous translatons le point d'équilibre $(1, 1, 1)$ à l'origine des coordonnées, puis le système (3.2) devient

$$\begin{aligned} \dot{X} &= (X + 1)((-2Xc_{31} + Yb_{11})\varepsilon + d_1X^2 + e_1XY + f_1XZ + g_1Y^2 + h_1YZ + k_1Z^2 - c_{30}X + c_1Z), \\ \dot{Y} &= (Y + 1)((-\frac{c_2c_{31}X}{c_1} + b_{21}Y)\varepsilon - \frac{c_2c_{30}X}{c_1} + c_2Z + d_2X^2 + e_2XY + f_2XZ + g_2Y^2 + h_2YZ + k_2Z^2), \\ \dot{Z} &= (Z + 1)(X^2d_3 + XYe_3 + XZf_3 + Y^2g_3 + YZh_3 + Z^2k_3 + Z\varepsilon c_{31} + Xa_3 + Yb_3 + Zc_{30}). \end{aligned} \quad (3.25)$$

Comme d'habitude, nous écrivons la partie linéaire du système (3.25) avec $\varepsilon = 0$ à $(0, 0, 0)$ dans sa forme normale de Jordan réelle

$$\begin{pmatrix} 0 & -\sqrt{-a_3c_1 - b_3c_2 - c_{30}^2} & 0 \\ \sqrt{-a_3c_1 - b_3c_2 - c_{30}^2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

tel que $a_3c_1 + b_3c_2 + c_{30}^2 < 0$.

Pour cela, nous effectuons le changement de variables

$$\begin{pmatrix} u \\ v \\ w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{M_5}{c_1A_5b_3} & \frac{1}{A_5} & 0 \\ \frac{c_{30}}{c_1\sqrt{-A_5}b_3} & 0 & -\frac{1}{b_3\sqrt{-A_5}} \\ -\frac{c_2}{c_1A_5} & \frac{1}{A_5} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \end{pmatrix},$$

avec inverse

$$\begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_1b_3 & 0 & -c_1b_3 \\ b_3c_2 & 0 & M_5 \\ c_{30}b_3 & -b_3\sqrt{-A_5} & -c_{30}b_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ v \\ w \end{pmatrix},$$

où $A_5 = a_3c_1 + b_3c_2 + c_{30}^2$, $M_5 = a_3c_1 + c_{30}^2$. En suivant les mêmes étapes que dans la preuve sous la condition (i), nous obtenons le système

$$\begin{aligned}
 \dot{r} = & -\frac{\varepsilon}{c_1 A_5^2 b_3} (\sqrt{-A_5} b_3^2 r^2 \cos^3 \theta (b_3 c_1 (c_{30}^2 k_2 + (c_1 f_2 + c_2 h_2) c_{30} + c_1^2 d_2 + c_1 c_2 e_2 + c_2^2 g_2) + (c_{30}^2 k_1 + \\
 & (c_1 f_1 + c_2 h_1) c_{30} + c_1^2 d_1 + c_1 c_2 e_1 + c_2^2 g_1) M_5) + \cos \theta \sqrt{-A_5} W ((b_3^3 c_1 (c_1^2 d_2 + c_1 c_{30} f_2 + c_{30}^2 k_2) \\
 & + ((d_1 - e_2) c_1^2 + c_{30} (f_1 - h_2) c_1 + c_{30}^2 k_1) b_3^2 M_5 - b_3 ((e_1 - g_2) c_1 + h_1 c_{30}) M_5^2 + M_5^3 g_1) W + \\
 & M_5 b_3 c_1 (b_{21} + 2c_{31}) + b_3^2 c_1 c_2 c_{31} + M_5^2 b_{11}) + \sqrt{-A_5} b_3 r \cos^2 \theta ((M_5^2 (c_1 e_1 + 2c_2 g_1 + c_{30} h_1) - \\
 & b_3^2 c_1 (2c_{30}^2 k_2 + (2c_1 f_2 + c_2 h_2) c_{30} + 2c_1^2 d_2 + c_1 c_2 e_2) - M_5 b_3 ((2d_1 - e_2) c_1^2 + ((-h_2 + 2f_1) c_{30} \\
 & + c_2 (e_1 - 2g_2)) c_1 + 2c_{30}^2 k_1 + c_2 c_{30} h_1)) W + b_3 c_1 c_2 (b_{21} - c_{31}) + M_5 (b_{11} c_2 - 2c_1 c_{31})) + A_5^2 b_3^2 \\
 & r^2 \sin^3 \theta (c_1 c_{30} + c_1 k_3 - c_{30} k_1) + A_5 b_3^2 r^2 \cos^2 \theta \sin \theta (((-a_3 - f_3 + d_1) c_{30} + b_3 f_2 - c_2 e_3) c_1^2 + \\
 & (-c_{30}^3 + (f_1 - k_3) c_{30}^2 + ((-h_3 - b_3 + e_1) c_2 + 2k_2 b_3) c_{30} - ((g_3 - b_3) c_2 - h_2 b_3) c_2) c_1 + c_{30} (c_2^2 \\
 & g_1 + c_2 c_{30} h_1 + c_{30}^2 k_1) + M_5 (c_1^2 + c_1 f_1 + c_2 h_1 + 2c_{30} k_1) - c_1^3 d_3) + A_5 b_3 r \cos \theta \sin \theta ((b_3 (2a_3 \\
 & c_{30} - b_3 f_2 + c_2 e_3 - 2c_{30} d_1 + 2c_{30} f_3) c_1^2 - b_3 (2(k_1 - c_1) c_{30}^3 + (2(f_1 - k_3) c_1 + c_2 h_1) c_{30}^2 + ((- \\
 & h_3 - b_3 + e_1) c_2 + 2k_2 b_3) c_1 c_{30} - 2c_1^3 d_3) - M_5 ((b_3 + e_3) c_1^2 + ((-h_2 - c_2 + c_{30} + f_1) b_3 + (h_3 \\
 & - e_1) c_{30} + 2c_2 g_3) c_1 + c_{30} (2b_3 k_1 - 2c_2 g_1 - c_{30} h_1)) + M_5^2 h_1) W + c_{30} (b_{11} c_2 - 3c_1 c_{31})) - A_5 \\
 & W \sin \theta (((c_1^3 d_3 + c_{30} (a_3 + f_3 - d_1) c_1^2 + c_{30}^2 (k_3 + c_{30} - f_1) c_1 - k_1 c_{30}^3) b_3^2 + M_5^2 (c_1 g_3 - c_{30} g_1 \\
 &) - (c_1^2 e_3 + c_{30} (b_3 - e_1 + h_3) c_1 - c_{30}^2 h_1) b_3 M_5) W - c_{30} (3b_3 c_1 c_{31} + M_5 b_{11})) + \cos \theta (-A_5)^{\frac{3}{2}} \\
 & r^2 b_3^2 \sin^2 \theta ((-a_3 + c_{30} - f_3) c_1^2 + (-2c_{30}^2 + (-2k_3 + f_1) c_{30} + (-h_3 - b_3) c_2 + k_2 b_3) c_1 + 2c_{30}^2 \\
 & k_1 + c_2 c_{30} h_1 + M_5 k_1) - (-A_5)^{\frac{3}{2}} b_3 r \sin^2 \theta (((b_3 + h_3) c_1 - h_1 c_{30}) M_5 - b_3 ((a_3 - c_{30} + f_3) c_1^2 \\
 & + c_{30} (2c_{30} - f_1 + 2k_3) c_1 - 2c_{30}^2 k_1)) W + c_1 c_{31})) = F_1(\theta, r, W), \\
 \dot{W} = & -\frac{\varepsilon}{c_1 A_5 \sqrt{-A_5}} (A_5 b_3^2 r^2 \sin^2 \theta (c_1 k_2 - c_2 k_1) - b_3^2 r^2 \cos^2 \theta (c_1^3 d_2 + ((-d_1 + e_2) c_2 + c_{30} f_2) c_1^2 + \\
 & ((g_2 - e_1) c_2^2 + c_{30} (h_2 - f_1) c_2 + c_{30}^2 k_2) c_1 - c_2^3 g_1 - c_2^2 c_{30} h_1 - c_2 c_{30}^2 k_1) + \sqrt{-A_5} W b_3 r \sin \theta ((\\
 & (c_2 - f_2) c_1^2 + (c_2 f_1 - 2c_{30} k_2) c_1 + 2c_2 c_{30} k_1) b_3 + M_5 ((c_2 + h_2) c_1 - c_2 h_1)) - \sqrt{-A_5} b_3^2 r^2 \\
 & \cos \theta \sin \theta ((c_2 - f_2) c_1^2 + (-c_2^2 + (f_1 - h_2) c_2 - 2c_{30} k_2) c_1 + c_2^2 h_1 + 2c_2 c_{30} k_1) - b_3 r \cos \theta (((\\
 & c_1^2 e_2 + ((-e_1 + 2g_2) c_2 + h_2 c_{30}) c_1 - 2c_2^2 g_1 - c_2 c_{30} h_1) M_5 - b_3 (2c_1^3 d_2 + ((-2d_1 + e_2) c_2 + \\
 & 2c_{30} f_2) c_1^2 + (-c_2^2 e_1 + c_{30} (h_2 - 2f_1) c_2 + 2c_{30}^2 k_2) c_1 - c_2^2 c_{30} h_1 - 2c_2 c_{30}^2 k_1)) W + c_2 ((b_{21} + c_{31} \\
 &) c_1 - b_{11} c_2) + (M_5 b_3 (c_1^2 e_2 - c_1 (c_2 e_1 - c_{30} h_2) - c_2 c_{30} h_1) - M_5^2 (c_1 g_2 - c_2 g_1) - b_3^2 (c_1^3 d_2 - \\
 & c_1^2 (c_2 d_1 - c_{30} f_2) - c_1 c_{30} (c_2 f_1 - c_{30} k_2) - c_2 c_{30}^2 k_1)) W^2 + (b_3 c_1 c_2 c_{31} + M_5 (b_{11} c_2 - b_{21} c_1)) W \\
 &) = F_2(\theta, r, W),
 \end{aligned} \tag{3.26}$$

Pour ce système différentiel, nous calculons les intégrales (3.5) et nous obtenons

$$f_1(r, W) = -\frac{r(T_5 W + N_5)}{2(-A_5)^{\frac{3}{2}} c_1}, \quad f_2(r, W) = \frac{D_5 W^2 + R_5 r^2 + C_5 W}{2(-A_5)^{\frac{3}{2}} c_1}.$$

Le système $f_1(r, W) = f_2(r, W) = 0$ a une unique solution (r^*, W^*) avec $r^* > 0$, à savoir

$$(r^*, W^*) = \left(\frac{1}{T_5} \sqrt{\frac{C_5 N_5 T_5 - D_5 N_5^2}{R_5}}, -\frac{N_5}{T_5} \right),$$

Si $T_5 > 0$, $R_5(C_5N_5T_5 - D_5N_5^2) > 0$, et le jacobien (3.6) en (r^*, W^*) est $-N_5(C_5T_5 - N_5D_5)/(2T_5c_1^2A_5^3) \neq 0$, où

$$\begin{aligned} N_5 &= b_3c_1c_2b_{21} + M_5(b_{11}c_2 - c_1c_{31}), \\ C_5 &= 2b_3c_1c_2c_{31} + 2M_5(b_{11}c_2 - b_{21}c_1), \\ D_5 &= 2M_5b_3(c_1^2e_2 - c_1(c_2e_1 - c_{30}h_2) - c_2c_{30}h_1) - 2M_5^2(c_1g_2 - c_2g_1) - 2b_3^2(c_1^3d_2 - c_1^2(c_2d_1 - c_{30}f_2) - c_1c_{30}(c_2f_1 - c_{30}k_2) - c_2c_{30}^2k_1), \\ R_5 &= b_3^2(A_5(c_1k_2 - c_2k_1) - c_1^3d_2 + ((d_1 - e_2)c_2 - c_{30}f_2)c_1^2 + ((-g_2 + e_1)c_2^2 - c_{30}(h_2 - f_1)c_2 - c_{30}^2k_2)c_1 + c_2(c_2^2g_1 + c_2c_{30}h_1 + c_{30}^2k_1)), \\ T_5 &= M_5^2(c_1e_1 + 2c_2g_1 + c_{30}h_1) - b_3^2c_1(2c_{30}^2k_2 + (2c_1f_2 + c_2h_2)c_{30} + 2c_1^2d_2 + c_1c_2e_2) - A_5b_3((a_3 - c_{30} + f_3)c_1^2 + (2c_{30} - f_1 + 2k_3)c_{30}c_1 - 2c_{30}^2k_1) + M_5(((b_3 + h_3)c_1 - c_{30}h_1)A_5 - ((2d_1 - e_2)c_1^2 + ((-h_2 + 2f_1)c_{30} + c_2(e_1 - 2g_2))c_1 + c_{30}(c_2h_1 + 2c_{30}k_1))b_3), \end{aligned}$$

alors, d'après le Théorème 3.2.1, pour $\varepsilon > 0$ suffisamment petit et en revenant sur les changements de variables du système (3.25), il existe une solution périodique $(X(t, \varepsilon), Y(t, \varepsilon), Z(t, \varepsilon))$ qui tend vers l'équilibre $(0, 0, 0)$ lorsque $\varepsilon \rightarrow 0$. Ainsi, il existe une solution périodique partant du point d'équilibre de zéro-Hopf $(1, 1, 1)$ lorsque $\varepsilon = 0$. Cela achève la démonstration du Théorème 3.1.1 sous la condition (v).

Exemple 5. Considérons le système de Kolmogorov

$$\begin{aligned} \dot{x} &= x(x - 3 + y + z + (x - 1)^2 + (x - 1)(y - 1) + (z - 1)^2), \\ \dot{y} &= y(-2x + y + z + (x - 1)^2 + (x - 1)(z - 1) - (y - 1)^2 - (y - 1)(z - 1) + (z - 1)^2), \\ \dot{z} &= z(x + 1 - 3y + z + (x - 1)^2 + (y - 1)^2 - 6(z - 1)^2). \end{aligned} \tag{3.27}$$

Ce système dans les variables (X, Y, Z) s'écrit

$$\begin{aligned} \dot{X} &= (X + 1)(X^2 + XY - 2X\varepsilon + Z^2 - X + Z), \\ \dot{Y} &= (Y + 1)(X^2 + XZ - X\varepsilon - Y^2 - YZ + Z^2 - X + Z), \\ \dot{Z} &= (Z + 1)(X^2 + Y^2 - 6Z^2 + Z\varepsilon + X - 3Y + Z). \end{aligned}$$

Le système correspondant associé au système (3.26) est

$$\begin{aligned} F_1(\theta, r, W) &= \frac{1}{3}(W \cos \theta(-3W - 3) + W \sin \theta(-65W + 9)) + r(-33r \cos^3 \theta + 3r \cos^2 \theta \sin \theta + 35W \cos^2 \theta + 37W \cos \theta \sin \theta - 3 \cos \theta \sin \theta + 42r \cos \theta - 18r \sin \theta - 42W + 1), \\ F_2(\theta, r, W) &= 18r^2 \cos^2 \theta + 3r \cos \theta(-8W + 1) + 7W^2 - 3W. \end{aligned}$$

Pour rechercher les cycles limites, nous devons résoudre le système

$$f_1(r, W) = -\frac{1}{2}r(49W - 2) = 0, \quad f_2(r, W) = 7W^2 + 9r^2 - 3W = 0.$$

Ce système a les solutions $(0, 0)$, $(0, 3/7)$, $(\sqrt{266}/147, 2/49)$, $(-\sqrt{266}/147, 2/49)$. Comme dans l'exemple 1, nous avons deux bonnes solutions, $(0, 3/7)$ et $(\sqrt{266}/147, 2/49)$. Les déterminants (3.6) en ces solutions sont respectivement $-57/2$ et $38/7$. Ainsi, le système (3.27) a deux cycles limites se bifurquant à partir du point d'équilibre $(1, 1, 1)$ en utilisant la théorie de moyennisation au premier ordre. Nous représentons ces deux cycles limites bifurqués pour $\varepsilon = 10^{-5}$ dans la Figure 3.5.

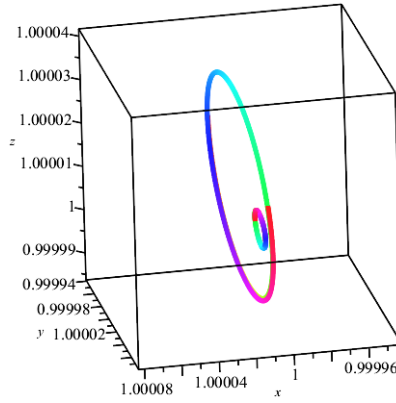


FIGURE 3.5: 1^{er} CL : $X(0) = 1 + 16\varepsilon/7$, $Y(0) = 1 + 13\varepsilon/7$, $Z(0) = 1 + 16\varepsilon/7$.

2^{ème} CL : $X(0) = 1 + (6 - \sqrt{266})\varepsilon/49$, $Y(0) = 1 + (4 - \sqrt{266})\varepsilon/49$, $Z(0) = 1 + (6 - \sqrt{266})\varepsilon/49$.

Les valeurs propres de la matrice jacobienne de (f_1, f_2) aux points singuliers $(\sqrt{266}/147, 2/49)$ et $(0, 3/7)$ sont respectivement $(-17 \pm 5i\sqrt{31})/14$ et $(3, -19/2)$. Selon le Théorème 3.2.1, les cycles limites sont respectivement stable et instable.

Preuve 7 (Preuve du Théorème 3.1.1 sous la condition (vi)) *Maintenant, nous considérons le système de Kolmogorov (3.2) perturbé avec les paramètres donnés dans la condition (vi). Nous translatons le point d'équilibre $(1, 1, 1)$ à l'origine des coordonnées et le système (3.2) devient*

$$\begin{aligned} \dot{X} &= (X + 1)(-2X(b_{21} + c_{31})\varepsilon + d_1X^2 + e_1XY + f_1XZ + g_1Y^2 + h_1YZ + k_1Z^2 - Xb_{20} - X \\ &\quad c_{30} + b_1Y + c_1Z), \\ \dot{Y} &= (Y + 1) \left(\left(b_{21}Y + \frac{b_{21}c_1Z}{b_1} \right) \varepsilon + a_2X + Yb_{20} + \frac{Zb_{20}c_1}{b_1} + d_2X^2 + e_2XY + f_2XZ + g_2Y^2 \right. \\ &\quad \left. + h_2YZ + k_2Z^2 \right), \\ \dot{Z} &= (Z + 1) \left(\left(\frac{2b_1c_{31}Y}{c_1} + c_{31}Z \right) \varepsilon + a_3X + \frac{b_1c_{30}Y}{c_1} + c_{30}Z + d_3X^2 + e_3XY + f_3XZ + g_3Y^2 \right. \\ &\quad \left. + h_3YZ + k_3Z^2 \right), \end{aligned} \tag{3.28}$$

Nous écrivons la partie linéaire du système (3.28) avec $\varepsilon = 0$ au point d'équilibre $(0, 0, 0)$ dans sa forme normale de Jordan réelle

$$\begin{pmatrix} 0 & -\sqrt{-A_6} & 0 \\ \sqrt{-A_6} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \text{ tel que } A_6 < 0.$$

Pour cela, nous effectuons le changement de variables

$$\begin{pmatrix} u \\ v \\ w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{A_6}} & 0 & 0 \\ \frac{b_{20} + c_{30}}{A_6} & -\frac{b_1}{A_6} & -\frac{c_1}{A_6} \\ -\frac{H_6}{b_1A_6} & -\frac{F_6}{A_6} & \frac{c_1P_6}{b_1A_6} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \end{pmatrix},$$

avec inverse

$$\begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sqrt{A_6} & 0 & 0 \\ \frac{b_{20}\sqrt{A_6}}{c_1} & \frac{P_6}{c_1} & 1 \\ \frac{c_{30}\sqrt{A_6}}{c_1} & \frac{F_6}{c_1} & -\frac{b_1}{c_1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ v \\ w \end{pmatrix},$$

où

$$\begin{aligned} A_6 &= -(a_2b_1 + a_3c_1 + b_{20}^2 + 2b_{20}c_{30} + c_{30}^2), & H_6 &= a_2b_1c_{30} - a_3b_{20}c_1, \\ P_6 &= a_2b_1 + b_{20}^2 + b_{20}c_{30}, & F_6 &= a_3c_1 + b_{20}c_{30} + c_{30}^2, \end{aligned}$$

et en suivant les mêmes étapes que dans la démonstration sous la condition (i), nous obtenons le système

$$\begin{aligned} \dot{r} = & \frac{\varepsilon}{A_6^{\frac{3}{2}}b_1^2c_1^2} ((W^2 \cos \theta (b_1^2k_1 - b_1c_1h_1 + c_1^2g_1))b_1^2 - r \sin \theta \cos \theta (((-c_1f_2 - 2c_{30}k_2)b_1^3 + ((e_2 - f_3 + \\ & a_2 - a_3)c_1^2 + ((f_1 - h_2 - c_{30})b_{20} + c_{30}(f_1 + h_2 - 2k_3 - c_{30}))c_1 + 2k_1(b_{20}c_{30} + c_{30}^2 + F_6))b_1^2 \\ & - (-e_3c_1^2 + (-b_{20}^2 + (e_1 - 2g_2 + h_3 - c_{30})b_{20} - c_{30}(h_3 - e_1))c_1 + h_1(-b_{20}^2 + c_{30}^2 + F_6 - P_6)) \\ & c_1b_1 - 2(-b_{20}g_3c_1 + g_1(b_{20}^2 + b_{20}c_{30} + P_6))c_1^2)W + b_1c_1^2((3b_{20} + 3c_{30})b_{21} + (4b_{20} + 3c_{30})c_{31} \\ &))b_1 + r^2 \cos \theta \sin^2 \theta (-b_1F_6(((-c_{30} + f_3 + a_3 - b_{20})b_1 + b_{20}(b_{20} + h_3))c_1^2 + (f_2b_1^2 + ((c_{30} - \\ & f_1 + h_2)b_{20} + c_{30}(2c_{30} - f_1 + 2k_3))b_1 - b_{20}h_1(b_{20} + c_{30}))c_1 - 2b_1(-k_2b_1 + k_1(b_{20} + c_{30})) \\ & c_{30}) - P_6c_1(((a_2 - b_{20} - c_{30} + e_2)c_1 + c_{30}(c_{30} + h_2))b_1^2 + (e_3c_1^2 + (2b_{20}^2 + (2g_2 + c_{30} - e_1) \\ & b_{20} + c_{30}(h_3 - e_1))c_1 - h_1c_{30}(b_{20} + c_{30}))b_1 + 2c_1(c_1g_3 - (b_{20} + c_{30})g_1)b_{20}) + F_6^2b_1^2k_1 + F_6 \\ & P_6b_1c_1h_1 + P_6^2c_1^2g_1))\sqrt{A_6} - b_1^2W \sin \theta ((k_2b_1^3 + ((-h_2 + k_3)c_1 - k_1(b_{20} + c_{30}))b_1^2 - c_1((h_3 - \\ & g_2)c_1 - h_1(b_{20} + c_{30}))b_1 - ((b_{20} + c_{30})g_1 - c_1g_3)c_1^2)W + b_1c_1^2c_{31}) - r^2 \sin^3 \theta (b_1^2F_6^2(k_2b_1 + (\\ & k_3 + c_{30})c_1 - k_1(b_{20} + c_{30})) + ((c_{30} + h_2)b_1 + (b_{20} + h_3)c_1 - h_1(b_{20} + c_{30}))P_6F_6b_1c_1 + ((\\ & g_2 + b_{20})b_1 - b_{20}g_1 + c_1g_3 - c_{30}g_1)c_1^2P_6^2) + b_1r \sin^2 \theta ((b_1(2b_1^2k_2 + ((2k_3 + c_{30} - h_2)c_1 - \\ & 2k_1(b_{20} + c_{30}))b_1 - c_1((b_{20} + h_3)c_1 - h_1(b_{20} + c_{30})))F_6 + c_1((c_{30} + h_2)b_1^2 + ((h_3 - b_{20} - \\ & 2g_2)c_1 - h_1(b_{20} + c_{30}))b_1 + 2c_1((b_{20} + c_{30})g_1 - c_1g_3))P_6)W - ((F_6 + P_6)b_{21} + c_{31}(F_6 + \\ & 2P_6))c_1^2b_1) + (r^2 \cos^3 \theta \sqrt{A_6}((c_1^2d_1 + c_1c_{30}f_1 + c_{30}^2k_1)b_1^2 + b_{20}c_1(c_1e_1 + c_{30}h_1)b_1 + b_{20}^2c_1^2g_1) \\ & + r^2 \sin \theta \cos^2 \theta ((-c_1^2d_2 - c_1c_{30}f_2 - c_{30}^2k_2)b_1^3 + (-d_3c_1^3 + ((d_1 - e_2 - a_2)b_{20} - c_{30}(f_3 + a_3 \\ & - d_1))c_1^2 + c_{30}((f_1 - h_2 - c_{30})b_{20} + c_{30}(f_1 - k_3 - c_{30}))c_1 + c_{30}^2k_1(b_{20} + c_{30}))b_1^2 + b_{20}(-e_3c_1^2 \\ & + (-b_{20}^2 + (-c_{30} + e_1 - g_2)b_{20} + c_{30}(e_1 - h_3))c_1 + h_1c_{30}(b_{20} + c_{30}))c_1b_1 + b_{20}^2c_1^2((b_{20} + c_{30}) \\ & g_1 - c_1g_3) + b_1F_6((c_1^2 + c_1f_1 + 2c_{30}k_1)b_1 + b_{20}h_1c_1) + c_1((b_1^2 + b_1e_1 + 2b_{20}g_1)c_1 + b_1c_{30}h_1) \\ & P_6) - r \cos^2 \theta (((c_1f_1 + 2c_{30}k_1)b_1^2 + c_1(-c_1e_1 + h_1(b_{20} - c_{30}))b_1 - 2b_{20}c_1^2g_1)W + 2c_1^2(b_{21} + \\ & c_{31})b_1)A_6) = F_1(\theta, r, W), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \dot{W} = & \frac{\varepsilon}{A_6^{\frac{3}{2}}b_1^3c_1^2} (b_1r \sin \theta (W(F_6^2b_1(2b_1^2k_2 - b_1c_1h_2 - b_{20}c_1^2) + F_6b_1(H_6(2b_1k_1 - c_1h_1) - ((b_{20} + 2g_2 \\ & - h_3)c_1 + b_1(2k_3 + c_{30} - h_2))P_6c_1) - P_6^2c_1(b_1^2c_{30} + b_1c_1h_3 - 2c_1^2g_3) + H_6P_6c_1(b_1h_1 - 2c_1g_1 \\ &)) + A_6F_6b_1c_1^2b_{21} + P_6b_1c_1^2(P_6 - A_6)c_{31}) - r^2 \sin^2 \theta (F_6^3b_1^3k_2 - P_6^3c_1^3g_3 - c_1b_1((c_{30} - h_2 + \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & k_3)b_1 - b_{20}c_1)P_6F_6^2 - c_1b_1P_6^2F_6((-b_{20} - g_2 + h_3)c_1 + b_1c_{30}) + H_6(F_6^2b_1^2k_1 + F_6P_6b_1c_1h_1 + \\
 & P_6^2c_1^2g_1)) - A_6r^2 \cos^2 \theta(((d_2b_1^2 + b_{20}(e_2 + a_2)b_1 + b_{20}^2(g_2 + b_{20} + c_{30}))c_1^2 + b_1c_{30}(b_1f_2 + b_{20} \\
 & h_2)c_1 + b_1^2c_{30}^2k_2)b_1F_6 - c_1P_6((d_3c_1^2 + c_{30}(f_3 + a_3)c_1 + c_{30}^2(k_3 + b_{20} + c_{30}))b_1^2 + b_{20}c_1(c_1e_3 + \\
 & c_{30}h_3)b_1 + g_3b_{20}^2c_1^2) + H_6((c_1^2d_1 + c_1c_{30}f_1 + c_{30}^2k_1)b_1^2 + b_{20}c_1(c_1e_1 + c_{30}h_1)b_1 + b_{20}^2c_1^2g_1)) - \\
 & b_1^2W(W(F_6b_1(b_1^2k_2 - b_1c_1h_2 + c_1^2g_2) - P_6c_1(b_1^2k_3 - b_1c_1h_3 + c_1^2g_3) + H_6(b_1^2k_1 - b_1c_1h_1 + \\
 & c_1^2g_1)) - P_6b_1c_1^2c_{31}) - \sqrt{A_6}(b_1r \cos \theta(W((((f_3 + a_3)c_1 + c_{30}(2k_3 + b_{20} + c_{30}))b_1^2 + c_1(-c_1 \\
 & e_3 + h_3(b_{20} - c_{30}))b_1 - 2b_{20}c_1^2g_3)c_1P_6 - H_6((c_1f_1 + 2c_{30}k_1)b_1^2 + c_1(-c_1e_1 + h_1(b_{20} - c_{30})) \\
 & b_1 - 2b_{20}c_1^2g_1) - b_1(((-a_2 - e_2)b_1 - (b_{20} + c_{30} + 2g_2)b_{20})c_1^2 + (b_1f_2 + h_2(b_{20} - c_{30}))b_1c_1 + \\
 & 2b_1^2c_{30}k_2)F_6) + (-2P_6b_1b_{20}c_1^2 - P_6b_1c_1^2c_{30} - 2H_6b_1c_1^2)c_{31} + (F_6b_1b_{20}c_1^2 + F_6b_1c_1^2c_{30} - 2H_6b_1 \\
 & c_1^2)b_{21}) + r^2 \cos \theta \sin \theta(F_6^2b_1(b_{20}^2c_1^2 + (b_1^2f_2 + b_1b_{20}h_2)c_1 + 2b_1^2c_{30}k_2) + F_6b_1(c_1P_6(((e_2 - f_3 \\
 & + a_2 - a_3)c_1 + c_{30}(h_2 - 2k_3 - b_{20} - 2c_{30}))b_1 - b_{20}c_1(h_3 - 2b_{20} - c_{30} - 2g_2)) + H_6((c_1^2 + \\
 & c_1f_1 + 2c_{30}k_1)b_1 + b_{20}h_1c_1)) - P_6^2c_1(b_1^2c_{30}^2 + b_1c_1^2e_3 + b_1c_1c_{30}h_3 + 2b_{20}c_1^2g_3) + ((b_1^2 + b_1e_1 \\
 & + 2b_{20}g_1)c_1 + b_1c_{30}h_1)c_1P_6H_6))) = F_2(\theta, r, W).
 \end{aligned} \tag{3.29}$$

En calculant les intégrales (3.5), nous obtenons

$$f_1(r, W) = -\frac{r(T_6W + N_6)}{2b_1A_6^{\frac{3}{2}}c_1^2}, \quad f_2(r, W) = -\frac{D_6W^2 + R_6r^2 + C_6W}{2A_6^{\frac{3}{2}}b_1^3c_1^2}.$$

Le système $f_1(r, W) = f_2(r, W) = 0$ a une solution unique (r^*, W^*) avec $r^* > 0$, à savoir

$$(r^*, W^*) = \left(\frac{1}{T_6} \sqrt{\frac{C_6N_6T_6 - D_6N_6^2}{R_6}}, -\frac{N_6}{T_6} \right),$$

si $T_6 > 0$, $R_6(C_6N_6T_6 - D_6N_6^2) > 0$, et le jacobien (3.6) en (r^*, W^*) est $-N_6(C_6T_6 - N_6D_6)/(2T_6A_6^3b_1^4c_1^4) \neq 0$, où

$$\begin{aligned}
 D_6 &= 2F_6b_1^3(b_1^2k_2 - b_1c_1h_2 + c_1^2g_2) - 2P_6b_1^2c_1(b_1^2k_3 - b_1c_1h_3 + c_1^2g_3) + 2H_6b_1^2(b_1^2k_1 - b_1c_1h_1 + \\
 & c_1^2g_1), \\
 C_6 &= -2b_1^3P_6c_1^2c_{31}, \\
 N_6 &= A_6b_1b_{21}c_1^2 - F_6b_1c_1^2c_{31}, \\
 R_6 &= F_6^3b_1^3k_2 + (H_6b_1^2k_1 - P_6c_1b_1((c_{30} - h_2 + k_3)b_1 - b_{20}c_1))F_6^2 + (A_6b_1((d_2b_1^2 + b_{20}(e_2 + a_2)b_1 \\
 & + b_{20}^2(b_{20} + c_{30} + g_2))c_1^2 + b_1c_{30}(b_1f_2 + b_{20}h_2)c_1 + k_2b_1^2c_{30}^2) - ((-b_{20} - g_2 + h_3)c_1 + b_1c_{30}) \\
 & P_6^2c_1b_1 + H_6P_6b_1c_1h_1)F_6 + A_6(((c_1^2d_1 + c_1c_{30}f_1 + c_{30}^2k_1)b_1^2 + b_{20}c_1(c_1e_1 + c_{30}h_1)b_1 + b_{20}^2c_1^2 \\
 & g_1)H_6 - P_6c_1((d_3c_1^2 + c_{30}(f_3 + a_3)c_1 + c_{30}^2(k_3 + b_{20} + c_{30}))b_1^2 + b_{20}c_1(c_1e_3 + c_{30}h_3)b_1 + g_3 \\
 & b_{20}^2c_1^2)) + P_6^2c_1^2(-P_6c_1g_3 + H_6g_1), \\
 T_6 &= A_6((c_1f_1 + 2c_{30}k_1)b_1^2 + c_1(-c_1e_1 + h_1(b_{20} - c_{30}))b_1 - 2b_{20}c_1^2g_1) - F_6b_1(2k_2b_1^2 + ((2k_3 + \\
 & c_{30} - h_2)c_1 - 2k_1(b_{20} + c_{30}))b_1 - ((b_{20} + h_3)c_1 - h_1(b_{20} + c_{30}))c_1) - P_6c_1((h_2 + c_{30})b_1^2 + \\
 & ((h_3 - b_{20} - 2g_2)c_1 - h_1(b_{20} + c_{30}))b_1 + 2(-g_3c_1 + g_1(b_{20} + c_{30}))c_1).
 \end{aligned}$$

Alors, selon le Théorème 3.2.1, pour $\varepsilon > 0$ suffisamment petit et en revenant sur les changements de variables, le système (3.28) a une solution périodique $(X(t, \varepsilon), Y(t, \varepsilon), Z(t, \varepsilon))$ qui

tend vers l'équilibre $(0, 0, 0)$ lorsque $\varepsilon \rightarrow 0$. Par conséquent, il existe une solution périodique partant du point d'équilibre de zéro-Hopf $(1, 1, 1)$ lorsque $\varepsilon = 0$. Cela achève la démonstration du Théorème 3.1.1 sous la condition (vi).

Exemple 6. Considérons le système de Kolmogorov

$$\begin{aligned} \dot{x} &= x(x - 3 + y + z + (x - 1)^2 + (x - 1)(y - 1) + (y - 1)^2 + (z - 1)^2), \\ \dot{y} &= y(-6x + 4 + y + z + (x - 1)^2 + (x - 1)(z - 1) + (y - 1)^2 + (y - 1)(z - 1) + (z - 1)^2), \\ \dot{z} &= z(x - 1 - y + z + (x - 1)^2 + (y - 1)^2 + (y - 1)(z - 1) + (z - 1)^2). \end{aligned} \quad (3.30)$$

Ce système dans les nouvelles variables (X, Y, Z) s'écrit

$$\begin{aligned} \dot{X} &= (X + 1)(X^2 + XY - 4X\varepsilon + Y^2 + Z^2 - 2X + Y + Z), \\ \dot{Y} &= (Y + 1)(X^2 + XZ + Y^2 + YZ + Z^2 - 6X + Y + Z), \\ \dot{Z} &= (Z + 1)((4Y + 2Z)\varepsilon + X^2 + Y^2 + YZ + Z^2 + X + Y + Z). \end{aligned}$$

Le système correspondant associé au système (3.29) est

$$\begin{aligned} F_1(\theta, r, W) &= 13r^2 \cos^3 \theta + (-30r^2 \sin \theta + r(15W - 14)) \cos^2 \theta + ((-4W - 14)r \sin \theta + 2W^2 - 9r^2) \cos \theta + (2W^2 + 23r^2 - 2W) \sin \theta + r(-14W + 10), \\ F_2(\theta, r, W) &= -87r^2 \cos^2 \theta + (-114r^2 \sin \theta + (34W - 52)r) \cos \theta + r \sin \theta(-50W + 40) + 7W^2 + 84r^2 - 8W. \end{aligned}$$

Pour rechercher les cycles limites, nous devons résoudre le système

$$f_1(r, W) = -\frac{r(13W - 6)}{2} = 0, \quad f_2(r, W) = 7W^2 + \frac{81}{2}r^2 - 8W = 0.$$

Ce système a les solutions (r, W) données par $(0, 8/7)$, $(2\sqrt{186}/117, 6/13)$, $(-2\sqrt{186}/117, 6/13)$, $(0, 0)$. Comme dans l'exemple 1, nous avons deux bonnes solutions, $(0, 8/7)$ et $(2\sqrt{186}/117, 6/13)$. Les déterminants (3.6) en ces solutions sont respectivement $-248/7$ et $372/13$. Ainsi, le système (3.30) a deux cycles limites bifurquant du point d'équilibre $(1, 1, 1)$ en utilisant la théorie de moyennisation du premier ordre. Nous représentons ces deux cycles limites bifurqués pour $\varepsilon = 10^{-5}$ dans la Figure 3.6.

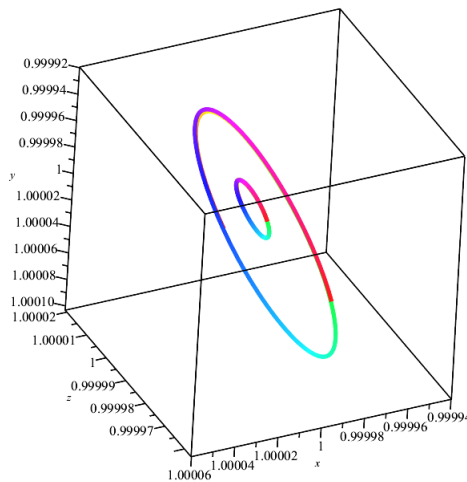


FIGURE 3.6: 1^{er} CL : $X(0) = 1 + \varepsilon$, $Y(0) = 1 + 8\varepsilon/7$, $Z(0) = 1 - 8\varepsilon/7$.

2^{ème} CL : $X(0) = 1 + 2\varepsilon\sqrt{286}/117$, $Y(0) = 1 + \varepsilon(2\sqrt{286} + 54)/117$, $Z(0) = 1 + \varepsilon(2\sqrt{286} - 54)/117$.

Les valeurs propres de la matrice jacobienne de (f_1, f_2) aux points singuliers $(2\sqrt{186}/117, 6/13)$ et $(0, 8/7)$ sont respectivement $(-10 \pm 8i\sqrt{74})/13$ et $(8, -31/7)$. Selon le Théorème 3.2.1, les cycles limites sont stable et instable, respectivement. Cela achève l'exemple 6.

Preuve 8 (Preuve du Théorème 3.1.1 sous la condition (vii)) *Maintenant, nous considérons le système de Kolmogorov (3.2) perturbé avec les paramètres donnés dans la condition (vii). Nous translatan le point d'équilibre $(1, 1, 1)$ à l'origine des coordonnées et le système (3.2) devient*

$$\begin{aligned} \dot{X} &= (X+1)((-2b_{21} - 2c_{31})X\varepsilon + (-b_{20} - c_{30})X + b_1Y + c_1Z + d_1X^2 + e_1XY + f_1XZ + g_1 \\ &\quad Y^2 + h_1YZ + k_1Z^2), \\ \dot{Y} &= (Y+1)\left(\left(\left(-\frac{b_{20}c_{31}}{b_1} - \frac{b_{20}(b_{21} + c_{31}) + b_{21}(b_{20} + c_{30})}{b_1}\right)X + b_{21}Y + \frac{b_{21}c_1Z}{b_1}\right)\varepsilon - \right. \\ &\quad \left. \frac{b_{20}(b_{20} + c_{30})X}{b_1} + b_{20}Y + \frac{b_{20}c_1Z}{b_1} + d_2X^2 + e_2XY + f_2XZ + g_2Y^2 + h_2YZ + k_2Z^2\right), \\ \dot{Z} &= (Z+1)(X^2d_3 + XYe_3 + XZf_3 + Y^2g_3 + YZh_3 + Z^2k_3 + Z\varepsilon c_{31} + Xa_3 + Yb_3 + Zc_{30}). \end{aligned} \quad (3.31)$$

Comme d'habitude, nous écrivons la partie linéaire du système (3.31) avec $\varepsilon = 0$ au point d'équilibre $(0, 0, 0)$ dans sa forme normale de Jordan réelle

$$\begin{pmatrix} 0 & -\frac{\sqrt{-b_1(a_3b_1c_1 + b_1c_{30}^2 + b_{20}b_3c_1)}}{b_1} & 0 \\ \frac{\sqrt{-b_1(a_3b_1c_1 + b_1c_{30}^2 + b_{20}b_3c_1)}}{b_1} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

tel que $b_1(a_3b_1c_1 + b_1c_{30}^2 + b_{20}b_3c_1) < 0$.

Pour cela, nous effectuons le changement de variables

$$\begin{pmatrix} u \\ v \\ w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{B_7}{b_1A_7} & \frac{M_7}{b_1A_7} & 0 \\ -\frac{b_{20} + c_{30}}{b_1\sqrt{-b_1A_7}} & \frac{1}{\sqrt{-b_1A_7}} & \frac{c_1}{b_1\sqrt{-b_1A_7}} \\ -\frac{b_{20}}{b_1A_7} & \frac{1}{A_7} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \end{pmatrix},$$

avec inverse

$$\begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -b_1^2 & 0 & b_1M_7 \\ -b_{20}b_1 & 0 & b_1B_7 \\ -\frac{b_1^2c_{30}}{c_1} & \frac{b_1\sqrt{-b_1A_7}}{c_1} & -b_1P_7 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ v \\ w \end{pmatrix},$$

où $A_7 = a_3b_1c_1 + b_1c_{30}^2 + b_{20}b_3c_1$, $M_7 = b_1c_{30} - b_3c_1$, $P_7 = a_3b_1 + b_{20}b_3 + b_3c_{30}$, $B_7 = a_3c_1 + b_{20}c_{30} + c_{30}^2$.

En suivant les mêmes étapes que dans la démonstration sous la condition (i), nous obtenons le système

$$\begin{aligned} \dot{r} &= \frac{\varepsilon}{b_1c_1^2A_7^2}(\sqrt{-b_1A_7}r^2b_1^2 \cos^3 \theta (B_7((c_1^2d_1 + c_1c_{30}f_1 + c_{30}^2k_1)b_1^2 + b_{20}c_1(c_1e_1 + c_{30}h_1)b_1 + b_{20}^2c_1^2g_1 \\ &\quad) - M_7((c_1^2d_2 + c_1c_{30}f_2 + c_{30}^2k_2)b_1^2 + b_{20}c_1(c_1e_2 + c_{30}h_2)b_1 + b_{20}^2c_1^2g_2)) + A_7^2b_1^3 \sin^3 \theta (k_2b_1 + \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & (c_{30} + k_3)c_1 - k_1(b_{20} + c_{30}))r^2 + A_7b_1^2r^2 \cos^2 \theta \sin \theta((-d_3c_1^3 + ((-a_3 - f_3 + d_1)c_{30} - b_{20}(e_2 \\
 & - d_1))c_1^2 + (-c_{30}^2 + (f_1 - k_3)c_{30} + b_{20}(f_1 - h_2))c_{30}c_1 + c_{30}^2k_1(b_{20} + c_{30}))b_1^2 + b_{20}c_1(-e_3c_1^2 + \\
 & ((e_1 - h_3 - b_3)c_{30} + b_{20}(e_1 - g_2))c_1 + c_{30}h_1(b_{20} + c_{30}))b_1 + b_{20}^2c_1^2(-g_3c_1 + g_1(b_{20} + c_{30})) + \\
 & B_7((c_1^2 + c_1f_1 + 2c_{30}k_1)b_1 + b_{20}c_1h_1)b_1 - (b_{20}^2c_1^2 + (b_1^2f_2 + b_1b_{20}h_2)c_1 + 2b_1^2c_{30}k_2)M_7 - (c_1^2d_2 \\
 & + c_1c_{30}f_2 + c_{30}^2k_2)b_1^3) - A_7b_1rc_1 \sin \theta \cos \theta((B_7b_1(((b_{20} + c_{30} - e_2)c_1 - h_2c_{30}))b_1^2 + (-e_3c_1^2 + \\
 & (-b_{20}^2 + (-2g_2 + e_1)b_{20} - c_{30}(h_3 + b_3 - e_1))c_1 + c_{30}h_1(b_{20} + c_{30}))b_1 - 2c_1(g_3c_1 - g_1(b_{20} + \\
 & c_{30}))b_{20} + M_7((c_1 + f_1 - h_2)b_1 - b_{20}c_1) - 2P_7b_1k_1) + b_1M_7((-2b_1d_3 - b_{20}e_3)c_1^2 + (-2d_2b_1^2 \\
 & + (-b_{20}^2 + (-e_2 - 2c_{30} + 2d_1)b_{20} - c_{30}(f_3 + a_3 + c_{30} - 2d_1))b_1 + b_{20}(b_{20} + e_1)(b_{20} + c_{30}))c_1 \\
 & + (-f_2b_1 + f_1(b_{20} + c_{30}))b_1c_{30} + 2P_7b_1k_2) + P_7b_1(((f_3 + a_3 - b_{20} - c_{30})b_1 + b_{20}(h_3 + b_{20} + \\
 & b_3))c_1^2 + (f_2b_1^2 + ((h_2 - f_1)b_{20} + (2k_3 + 2c_{30} - f_1)c_{30})b_1 - b_{20}h_1(b_{20} + c_{30}))c_1 - 2b_1c_{30}(-k_2 \\
 & b_1 + k_1(b_{20} + c_{30}))) + b_1^2(B_7^2h_1 - M_7^2f_2))W - (((b_{20} + 3c_{30})b_1 - b_3c_1)b_{21} + 3b_1c_{30}c_{31})c_1 - \\
 & A_7b_1Wc_1^2 \sin \theta((B_7^2b_1((b_{20} + g_2)b_1 - b_{20}g_1 + g_3c_1 - c_{30}g_1) - B_7b_1(M_7(b_{20}^2 + (b_1 + c_{30} + e_1) \\
 & b_{20} + (c_{30} - e_2)b_1 - c_1e_3 + c_{30}e_1) + P_7((h_3 + b_{20} + b_3)c_1 + b_1h_2 - b_{20}h_1 - c_{30}h_1)) + M_7^2(\\
 & b_{20}^2 + (2c_{30} - d_1)b_{20} + b_1d_2 + c_1d_3 + c_{30}^2 - c_{30}d_1)b_1 - b_1M_7((f_3 + a_3 - b_{20} - c_{30})c_1 + f_2b_1 - \\
 & f_1(b_{20} + c_{30}))P_7 + (k_2b_1 + (c_{30} + k_3)c_1 - k_1(b_{20} + c_{30}))P_7^2b_1)W + B_7b_1b_{21} - P_7c_1(b_{21} + \\
 & c_{31}) + M_7c_{30}(b_{21} + 2c_{31})) - \sqrt{-b_1A_7r^2}b_1^2A_7 \cos \theta \sin^2 \theta(((-a_3 + b_{20} + c_{30} - f_3)b_1 - b_{20}(h_3 \\
 & + b_{20} + b_3))c_1^2 + ((b_{20}(f_1 - h_2) - (2k_3 + 2c_{30} - f_1)c_{30})b_1 + b_{20}h_1(b_{20} + c_{30}) - f_2b_1^2)c_1 + \\
 & 2b_1c_{30}(-k_2b_1 + k_1(b_{20} + c_{30})) + b_1(B_7k_1 - M_7k_2)) + \sqrt{-b_1A_7}Wc_1^2 \cos \theta((B_7^3b_1^2g_1 + B_7^2((b_1 \\
 & - b_{20} + e_1 - g_2)M_7 - P_7h_1)b_1^2 - B_7b_1(M_7^2((b_{20} + c_{30} - d_1 + e_2)b_1 - b_{20}(b_{20} + c_{30})) + M_7(\\
 & (c_1 + f_1 - h_2)b_1 - b_{20}c_1)P_7 - P_7^2b_1k_1) - M_7b_1^2(M_7^2d_2 - M_7P_7f_2 + P_7^2k_2))W - B_7M_7b_1(\\
 & 3b_{21} + 2c_{31}) + M_7^2((2b_{20} + c_{30})b_{21} + 2b_{20}c_{31}) + M_7P_7b_{21}c_1) + r(((-B_7^2b_1(b_1^2c_1 + b_1(c_1e_1 + \\
 & c_{30}h_1) + 2b_{20}c_1g_1) + B_7b_1(M_7(((b_{20} + c_{30} - 2d_1 + e_2)b_1 + b_{20}(b_{20} - e_1 + 2g_2))c_1 + b_1c_{30}(\\
 & h_2 - f_1)) + P_7((c_1^2 + c_1f_1 + 2c_{30}k_1)b_1 + b_{20}c_1h_1) + A_7((h_3 + b_{20} + b_3)c_1 + b_1h_2 - b_{20}h_1 - \\
 & c_{30}h_1)) + M_7^2((2d_2b_1^2 + b_1b_{20}e_2 - b_{20}^2(b_{20} + c_{30}))c_1 + b_1^2c_{30}f_2) + M_7(b_1A_7((f_3 + a_3 - b_{20} - \\
 & c_{30})c_1 + f_2b_1 - f_1(b_{20} + c_{30})) - P_7(b_{20}^2c_1^2 + (b_1^2f_2 + b_1b_{20}h_2)c_1 + 2b_1^2c_{30}k_2)) - 2b_1A_7(k_2b_1 \\
 & + (c_{30} + k_3)c_1 - k_1(b_{20} + c_{30}))P_7)W + 2B_7b_1b_{21}c_1 + 2B_7b_1c_1c_{31} - M_7b_{20}b_{21}c_1 - 2M_7b_{20}c_1 \\
 & c_{31} + A_7b_{21}c_1 + A_7c_1c_{31}) \cos^2 \theta - A_7((B_7((h_3 + b_{20} + b_3)c_1 + b_1h_2 - h_1(b_{20} + c_{30}))b_1 + b_1 \\
 & M_7((f_3 + a_3 - b_{20} - c_{30})c_1 + f_2b_1 - f_1(b_{20} + c_{30})) - 2(k_2b_1 + (c_{30} + k_3)c_1 - k_1(b_{20} + c_{30}) \\
 &)P_7b_1)W + c_1(b_{21} + c_{31})))b_1\sqrt{-b_1A_7c_1} = F_1(\theta, r, W),
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \dot{W} = & \frac{\varepsilon\sqrt{-b_1A_7}}{c_1^2A_7^2}(A_7b_1^2r^2 \sin^2 \theta(b_1k_2 - b_{20}k_1) + \sqrt{-b_1A_7}b_1r^2 \cos \theta \sin \theta((c_1f_2 + 2c_{30}k_2)b_1^2 - b_{20}(c_1^2 \\
 & + (f_1 - h_2)c_1 + 2c_{30}k_1)b_1 + b_{20}^2c_1(c_1 - h_1)) - \sqrt{-b_1A_7}c_1r \sin \theta(Wb_1(B_7((c_1 - h_1)b_{20} + b_1 \\
 & h_2) + M_7((-c_1 - f_1)b_{20} + f_2b_1) - 2P_7(b_1k_2 - b_{20}k_1)) + c_1b_{21}) - b_1c_1r \cos \theta((B_7((b_{20}c_1 - \\
 & c_1e_2 - c_{30}h_2)b_1^2 + b_{20}(-b_{20}c_1 + (-2g_2 + e_1)c_1 + c_{30}h_1)b_1 + 2b_{20}^2c_1g_1) + (b_{20}^3c_1 - c_1(b_1 - \\
 & c_{30} - e_1)b_{20}^2 + b_1((-c_{30} + 2d_1 - e_2)c_1 + f_1c_{30})b_{20} - b_1^2(2c_1d_2 + c_{30}f_2))M_7 + P_7((c_1f_2 +
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & 2c_{30}k_2)b_1^2 - b_{20}(c_1^2 + (f_1 - h_2)c_1 + 2c_{30}k_1)b_1 + b_{20}^2c_1(c_1 - h_1))W - b_{20}b_{21}c_1 - b_1r^2 \cos^2 \theta \\
 & ((c_1^2d_2 + c_1c_{30}f_2 + c_{30}^2k_2)b_1^3 + ((e_2 - d_1)c_1^2 - c_{30}(f_1 - h_2)c_1 - k_1c_{30}^2)b_{20}b_1^2 + ((g_2 - e_1)c_1 - \\
 & c_{30}h_1)b_{20}^2c_1b_1 - b_{20}^3c_1^2g_1) + (B_7b_1c_1^2(M_7(b_{20}^2 + (b_1 + c_{30} + e_1)b_{20} - b_1e_2) + P_7((c_1 - h_1)b_{20} \\
 & + b_1h_2)) - M_7^2c_1^2b_1(b_{20}^2 + (c_{30} - d_1)b_{20} + b_1d_2) + b_1M_7P_7(f_2b_1 - b_{20}(c_1 + f_1))c_1^2 - P_7^2b_1c_1^2(\\
 & b_1k_2 - b_{20}k_1) - B_7^2((b_{20} + g_2)b_1 - b_{20}g_1)c_1^2b_1)W^2 - b_{21}c_1^2b_{20}M_7W) = F_2(\theta, r, W),
 \end{aligned} \tag{3.32}$$

Maintenant, nous calculons les intégrales (3.5) et nous obtenons

$$f_1(r, W) = -\frac{r\sqrt{-A_7b_1}(T_7W + N_7)}{2c_1A_7^2}, \quad f_2(r, W) = \frac{(R_7r^2 + D_7W^2 + C_7W)\sqrt{-A_7b_1}}{2c_1^2A_7^2}.$$

Le système $f_1(r, W) = f_2(r, W) = 0$ a une solution unique (r^*, W^*) avec $r^* > 0$, à savoir

$$(r^*, W^*) = \left(\frac{1}{T_7} \sqrt{\frac{C_7N_7T_7 - D_7N_7^2}{R_7}}, -\frac{N_7}{T_7} \right),$$

si $T_7 > 0$, $R_7(C_7N_7T_7 - D_7N_7^2) > 0$ et le jacobien (3.6) en (r^*, W^*) est $-b_1N_7(C_7T_7 - N_7D_7)/(2A_7^3c_1^3T_7) \neq 0$, où

$$N_7 = -((a_3(b_{21} + c_{31})c_1 + c_{30}((b_{20} + c_{30})b_{21} + c_{30}c_{31}))b_1 + b_{20}b_3c_1c_{31})c_1,$$

$$C_7 = -2b_{21}c_1^2b_{20}M_7,$$

$$\begin{aligned}
 R_7 = & A_7b_1^2(b_1k_2 - b_{20}k_1) - b_1((c_1^2d_2 + c_1c_{30}f_2 + c_{30}^2k_2)b_1^3 + ((-d_1 + e_2)c_1^2 + c_{30}(h_2 - f_1)c_1 - k_1 \\
 & c_{30}^2)b_{20}b_1^2 + c_1b_{20}^2((g_2 - e_1)c_1 - c_{30}h_1)b_1 - b_{20}^3c_1^2g_1),
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 D_7 = & 2b_1c_1^2B_7(M_7(b_{20}^2 + (b_1 + c_{30} + e_1)b_{20} - b_1e_2) + P_7((c_1 - h_1)b_{20} + b_1h_2)) - 2M_7^2(b_{20}^2 + (c_{30} \\
 & - d_1)b_{20} + b_1d_2)c_1^2b_1 + 2c_1^2b_1(b_1f_2 - b_{20}(c_1 + f_1))M_7P_7 - 2b_1c_1^2P_7^2(b_1k_2 - b_{20}k_1) - 2B_7^2c_1^2(\\
 & (b_{20} + g_2)b_1 - b_{20}g_1)b_1,
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 T_7 = & B_7^2b_1(b_1^2c_1 + b_1(c_1e_1 + c_{30}h_1) + 2b_{20}c_1g_1) + B_7b_1(A_7((b_{20} + b_3 + h_3)c_1 + b_1h_2 - b_{20}h_1 - \\
 & c_{30}h_1) - M_7(((b_{20} + c_{30} - 2d_1 + e_2)b_1 + b_{20}(b_{20} - e_1 + 2g_2))c_1 + b_1c_{30}(h_2 - f_1)) - ((c_1^2 + \\
 & c_1f_1 + 2c_{30}k_1)b_1 + b_{20}c_1h_1)P_7) - M_7^2((2b_1^2d_2 + b_1b_{20}e_2 - b_{20}^2(b_{20} + c_{30}))c_1 + b_1^2c_{30}f_2) + \\
 & M_7(P_7(b_{20}^2c_1^2 + (b_1^2f_2 + b_1b_{20}h_2)c_1 + 2b_1^2c_{30}k_2) + b_1A_7((a_3 - b_{20} - c_{30} + f_3)c_1 + b_1f_2 - f_1 \\
 & (b_{20} + c_{30}))) - 2b_1A_7(b_1k_2 + (c_{30} + k_3)c_1 - k_1(b_{20} + c_{30}))P_7,
 \end{aligned}$$

alors, selon le Théorème 3.2.1, pour $\varepsilon > 0$ suffisamment petit et en revenant sur les changements de variables, le système (3.32) a une solution périodique $(X(t, \varepsilon), Y(t, \varepsilon), Z(t, \varepsilon))$ qui tend vers l'équilibre $(0, 0, 0)$ lorsque $\varepsilon \rightarrow 0$. Par conséquent, il existe une solution périodique partant du point d'équilibre de zéro-Hopf $(1, 1, 1)$ lorsque $\varepsilon = 0$. Cela achève la démonstration du Théorème 3.1.1 sous la condition (vii).

Exemple 7. Considérons le système de Kolmogorov

$$\begin{aligned}
 \dot{x} &= x(x + y - 2z + (x - 1)^2 + (x - 1)(y - 1) - (y - 1)^2 + (z - 1)^2), \\
 \dot{y} &= y(-2x + y + z + (x - 1)^2 + (x - 1)(z - 1) + (y - 1)^2 + (z - 1)^2), \\
 \dot{z} &= z(2x - 2 - y + z + (x - 1)^2 + (y - 1)^2 + (y - 1)(z - 1) + (z - 1)^2).
 \end{aligned} \tag{3.33}$$

Ce système dans les variables (X, Y, Z) s'écrit

$$\begin{aligned}\dot{X} &= (X + 1)(X^2 + XY + 6X\varepsilon - Y^2 + Z^2 - 2X + Y - 2Z), \\ \dot{Y} &= (Y + 1)((2X + 4Y - 8Z)\varepsilon - 2X + Y - 2Z + X^2 + XZ + Y^2 + Z^2), \\ \dot{Z} &= (Z + 1)(X^2 + Y^2 + YZ + Z^2 - 7Z\varepsilon + 2X - Y + Z).\end{aligned}$$

Les deux composantes correspondant au système (3.32) dans ce cas sont

$$\begin{aligned}F_1(\theta, r, W) &= -\frac{r^2}{4}(3\cos^3(\theta) + 7\cos^2(\theta)\sin(\theta) + 5\sin^3(\theta) - 7\cos(\theta)\sin^2(\theta)) - \frac{1}{2}(\sin(\theta)\cos(\theta) \\ &\quad r(12W - 26) + r((-10W - 10)\cos^2(\theta) + 3W + 6)) + \sin(\theta)W(-3W + 2) + \\ &\quad \cos(\theta)W(7W + 2), \\ F_2(\theta, r, W) &= -\frac{1}{2}(\cos(\theta)\sin(\theta)r^2 + \cos^2(\theta)r^2 - \sin(\theta)r(W - 8) - \cos(\theta)r(-9W + 8)) - 6W^2 \\ &\quad + 4W.\end{aligned}$$

Pour rechercher les cycles limites, nous devons résoudre le système

$$f_1(r, W) = \frac{r(4W - 2)}{4} = 0, \quad f_2(r, W) = -6W^2 - \frac{r^2}{4} + 4W = 0. \quad (3.34)$$

Comme dans l'exemple 1, nous avons deux bonnes solutions, $(0, 2/3)$ et $(\sqrt{2}, 1/2)$. Les déterminants (3.6) en ces solutions sont respectivement $-2/3$ et 1. Ainsi, le système (3.33) a deux cycles limites bifurquant du point d'équilibre $(1, 1, 1)$ en utilisant la théorie de moyennisation au premier ordre. Nous représentons ces deux cycles limites bifurqués pour $\varepsilon = 10^{-5}$ dans la Figure 3.7.

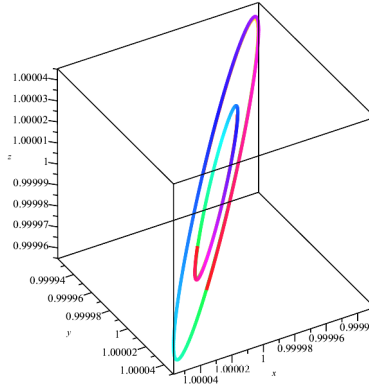


FIGURE 3.7: 1^{er} CL : $X(0) = 1 - 2\varepsilon/3$, $Y(0) = 1 - 4\varepsilon/3$, $Z(0) = 1 + \varepsilon$.

2^{ème} CL : $X(0) = 1 - \varepsilon(2\sqrt{10} + 1)/2$, $Y(0) = 1 - \varepsilon(\sqrt{10} + 1)$, $Z(0) = 1 + \varepsilon\sqrt{10}/2$.

Les valeurs propres de la matrice jacobienne de (f_1, f_2) aux points singuliers $(0, 2/3)$ et $(\sqrt{2}, 1/2)$ sont respectivement $(-4, 1/6)$ et -1 avec multiplicité deux. Selon le Théorème 3.2.1, les cycles limites sont respectivement instable et stable.

Preuve 9 (Preuve du Théorème 3.1.1 sous la condition (viii)) *Maintenant, nous considérons le système de Kolmogorov (3.2) perturbé avec les paramètres donnés dans la condition*

(viii). Nous translatan le point d'équilibre $(1, 1, 1)$ à l'origine des coordonnées et le système (3.2) devient

$$\begin{aligned}\dot{X} &= (X + 1)((-b_2 - c_{30})X + b_1Y + c_1Z + d_1X^2 + e_1XY + f_1XZ + g_1Y^2 + h_1YZ + k_1Z^2 - \\ &\quad 2c_{31}X\varepsilon), \\ \dot{Y} &= (Y + 1)(X^2d_2 + XYe_2 + XZf_2 + Y^2g_2 + YZh_2 + Z^2k_2 + Xa_2 + Yb_2 + Zc_2), \\ \dot{Z} &= (Z + 1) \left(\left(\frac{(a_2b_1c_{31} + (b_2 + c_{30})b_2c_{31} + c_{31}(b_2c_{30} - b_3c_2))X}{b_1c_2 - b_2c_1} + c_{31}Z \right) \varepsilon + \frac{1}{b_1c_2 - b_2c_1} ((a_2(b_1c_{30} - b_3c_1) + (b_2 + c_{30})(b_2c_{30} - b_3c_2))X) + b_3Y + c_{30}Z + d_3X^2 + e_3XY + f_3XZ + g_3Y^2 + h_3YZ + k_3Z^2 \right).\end{aligned}\tag{3.35}$$

Nous écrivons la partie linéaire du système (3.35) avec $\varepsilon = 0$ au point d'équilibre $(0, 0, 0)$ dans sa forme normale de Jordan réelle

$$\begin{pmatrix} 0 & -\frac{\sqrt{(b_1c_2 - b_2c_1)A}}{b_1c_2 - b_2c_1} & 0 \\ \frac{\sqrt{(b_1c_2 - b_2c_1)A}}{b_1c_2 - b_2c_1} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

où $A = -(-b_2^3c_1 + b_1b_2^2c_2 + b_2(-2b_3c_1c_2 + b_1c_2c_{30}) + c_2(b_1b_3c_2 - b_3c_1c_{30} + b_1c_2^2) + a_2(b_1^2c_2 - b_3c_1^2 + b_1c_1(c_{30} - b_2)))$ et $(b_1c_2 - b_2c_1)A > 0$.

Pour cela, nous effectuons le changement de variables

$$\begin{pmatrix} u \\ v \\ w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{FL}{EA} & -\frac{FM}{EA} & -\frac{F}{A} \\ -\frac{K\sqrt{FA}}{EA} & \frac{F\sqrt{FA}}{EA} & 0 \\ -\frac{G}{A} & \frac{H}{A} & -\frac{F}{A} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \end{pmatrix},$$

avec inverse

$$\begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} F & -\frac{c_1A}{\sqrt{AF}} & -F \\ K & -\frac{c_2A}{\sqrt{AF}} & -K \\ \frac{S}{F} & -\frac{c_{30}A}{\sqrt{AF}} & P \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ v \\ w \end{pmatrix},$$

où

$$\begin{aligned}E &= a_2c_1^2 - b_1c_2^2 + 2b_2c_1c_2 + c_1c_2c_{30}, & P &= a_2b_1 + b_2^2 + b_2c_{30}, & F &= b_1c_2 - b_2c_1, \\ M &= a_2b_1c_1 + b_1c_2c_{30} + b_2^2c_1, & K &= a_2c_1 + b_2c_2 + c_2c_{30}, & H &= b_1c_{30} - b_3c_1, \\ G &= b_2c_{30} - b_3c_2, & A_8 &= -A, \\ L &= a_2b_1c_2 + a_2c_1c_{30} + b_2^2c_2 + 2b_2c_2c_{30} + c_2c_{30}^2, \\ S &= a_2b_1c_1c_{30} - a_2b_3c_1^2 + b_1b_3c_2^2 + b_1c_2c_{30}^2 + b_2^2c_1c_{30} - 2b_2b_3c_1c_2 - b_3c_1c_2c_{30}.\end{aligned}$$

En suivant les mêmes étapes que dans le premier cas (i), nous obtenons le système

$$\begin{aligned}
 \dot{r} = & \frac{\varepsilon}{F^3 A_8^2 E \sqrt{-F A_8}} (F^4 A_8 W \cos \theta (((Ed_3 + L(b_2 + c_{30} - d_1) + Md_2)F^3 - KP(E(h_3 + b_3)F - \\
 & Lh_1F + M(-b_2c_1c_2 + Fh_2)) + (E(Ke_3F - P(b_2^2c_{30} + (-b_3c_2 - c_1f_3 + c_{30}^2)b_2 + (a_2b_1 - b_3 \\
 & c_2)c_{30} - a_2b_3c_1 + b_1c_2f_3)) - KF(L(b_1 + e_1) - M(a_2 + e_2)) + PF(L(c_1 + f_1) - Mf_2))F + \\
 & F(Eg_3 - Lg_1 + M(b_2 + g_2))K^2 - MKPb_1c_2^2 + P^2F(E(k_3 + c_{30}) - Lk_1 + Mk_2))W - c_{31} \\
 & F(EG + 2FL)) - F^2A_8^2r^2 \sin^2 \theta (((a_2 + e_2)c_2 + 2c_1d_2 + c_{30}f_2)F^4 + KF^3((a_2 + 2b_2 + c_{30} - \\
 & 2d_1 + e_2)c_1 + (2g_2 - b_1 + 2b_2 + c_{30} - e_1)c_2 - c_{30}(f_1 - h_2)) + (E(-b_2c_1^3d_3 + ((b_1d_3 - b_2e_3) \\
 & c_2 - c_{30}(a_2b_3 + b_2f_3))c_1^2 + ((b_1e_3 - b_2g_3)c_2^2 + (-b_3c_{30} + f_3b_1 - b_2(h_3 + 2b_3))c_{30}c_2 - c_{30}^2(- \\
 & a_2b_1 + b_2(k_3 - b_2)))c_1 + b_1c_2(g_3c_2^2 + c_{30}(h_3 + b_3)c_2 + c_{30}^2(k_3 + c_{30}))) - K^2((b_1 + e_1)c_1 + \\
 & 2c_2g_1 + c_{30}h_1)F - LF((-b_2 + d_1)c_1^2 + ((b_1 + e_1)c_2 + c_{30}f_1)c_1 + c_2^2g_1 + c_2c_{30}h_1 + c_{30}^2k_1) + \\
 & FM((g_2 + b_2 + c_{30})c_2^2 + ((a_2 + e_2)c_1 + h_2c_{30})c_2 + c_1c_{30}f_2 + c_{30}^2k_2 + c_1^2d_2) + S(c_1f_2 + c_2^2 + \\
 & c_2h_2 + 2c_{30}k_2)F)F - KS(c_1^2 + c_1f_1 + c_2h_1 + 2c_{30}k_1)F) \cos \theta + F^2A_8r^2 \cos^3 \theta ((F(Ed_3 + \\
 & Md_2) + L(b_2 + c_{30} - d_1)F + (Ee_3 - L(b_1 + e_1) + M(a_2 + e_2))K)F^4 + (F(Eg_3 - Lg_1 + \\
 & M(b_2 + g_2))K^2 + S(E(Ff_3 + G(b_2 + c_{30}) + Ha_2) - F(L(c_1 + f_1) - Mf_2)) + KS(E(h_3 + \\
 & b_3) - Lh_1 + M(c_2 + h_2)))F^2 + S^2F(E(k_3 + c_{30}) - Lk_1 + Mk_2)) - F^3A_8r \cos^2 \theta (((2Ed_3 + \\
 & 2L(b_2 + c_{30} - d_1) + 2Md_2)F^4 + (E(2Ke_3F - P(Ff_3 - Kb_3 + Pc_{30})) + 2F(M(a_2 + e_2) - \\
 & L(b_1 + e_1))K + PF(L(c_1 + f_1) - Mf_2))F^2 + (2F(Eg_3 - Lg_1 + M(b_2 + g_2))K^2 - PF(E(\\
 & h_3 + b_3) - Lh_1 + M(c_2 + h_2))K + S(E(Ff_3 - Kb_3 + Pc_{30}) - L(c_1 + f_1)F + Mf_2F))F + \\
 & SF(E(K(h_3 + b_3) - 2P(k_3 + c_{30})) - K(Lh_1 - M(c_2 + h_2)) + 2P(Lk_1 - Mk_2)))W - F^2 \\
 & c_{31}(E(P + G) + 2FL) - ESC_{31}F) + (-FA_8)^{\frac{3}{2}}F^3W \sin \theta ((F^3d_2 + (K(a_2 + b_2 + c_{30} - d_1 \\
 & + e_2) - Pf_2)F^2 + (KP(c_1 - c_2 + f_1 - h_2) + P^2k_2 - K^2(b_1 - b_2 + e_1 - g_2))F - K^3g_1 + \\
 & K^2Ph_1 - KP^2k_1)W - 2FKc_{31}) + F^4A_8^2r \sin^2 \theta (((a_2 + e_2)c_2 + 2c_1d_2 + c_{30}f_2)F^2 + (K((\\
 & a_2 + 2b_2 + c_{30} - 2d_1 + e_2)c_1 + (2g_2 - b_1 + 2b_2 + c_{30} - e_1)c_2 - c_{30}(f_1 - h_2)) - P(c_1f_2 + \\
 & c_2^2 + c_2h_2 + 2c_{30}k_2))F - K^2((b_1 + e_1)c_1 + 2c_2g_1 + c_{30}h_1) + KP(c_1^2 + c_1f_1 + c_2h_1 + 2c_{30}k_1 \\
 &))W - 2Kc_1c_{31}) + F^3\sqrt{-FA_8}A_8^2r^2 \sin^3 \theta (((g_2 + b_2 + c_{30})c_2^2 + ((a_2 + e_2)c_1 + h_2c_{30})c_2 + \\
 & c_1c_{30}f_2 + c_{30}^2k_2 + c_1^2d_2)F - ((-b_2 + d_1)c_1^2 + ((b_1 + e_1)c_2 + c_{30}f_1)c_1 + c_2^2g_1 + c_2c_{30}h_1 + c_{30}^2 \\
 & k_1)K) + F^2\sqrt{-FA_8}rA_8 \cos \theta \sin \theta ((2d_2F^5 + (2K(a_2 + b_2 + c_{30} - d_1 + e_2) - Pf_2)F^4 + (\\
 & E(c_{30}^2P + F(2c_1d_3 + c_2e_3 + c_{30}f_3) - b_3c_{30}K) - 2K^2(b_1 - b_2 + e_1 - g_2)F + KP(c_1 - c_2 + \\
 & f_1 - h_2)F - L((-2b_2 - c_{30} + 2d_1)c_1 + (b_1 + e_1)c_2 + c_{30}f_1)F + FM((a_2 + e_2)c_2 + 2c_1d_2 \\
 & + c_{30}f_2) + Sf_2F)F^2 + (E(K(c_1e_3 + 2c_2g_3 + c_{30}(h_3 + b_3))F - P(S + F(c_1f_3 + c_2h_3 + c_{30}^2 \\
 & + 2c_{30}k_3))) - F(2K^3g_1 - K^2Ph_1 + K(L((b_1 + e_1)c_1 + 2c_2g_1 + c_{30}h_1) - M((2b_2 + c_{30} + \\
 & 2g_2)c_2 + (a_2 + e_2)c_1 + h_2c_{30})) - P(L(c_1^2 + c_1f_1 + c_2h_1 + 2c_{30}k_1) - M(c_1f_2 + c_2^2 + c_2h_2 + \\
 & 2c_{30}k_2)) + S(K(c_1 - c_2 + f_1 - h_2) + 2Pk_2)))F - KSF(Kh_1 - 2Pk_1))W - Fc_{31}(E(Hc_2 \\
 & + Pc_1) + 2F^2K + 2Lc_1F)) - \sqrt{-FA_8}r^2FA_8 \sin \theta \cos^2 \theta (d_2F^6 + KF(a_2 + b_2 + c_{30} - d_1
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & +e_2)F^4 + (E(c_{30}^2P + F(2c_1d_3 + c_2e_3 + c_{30}f_3) - b_3c_{30}K) - K^2(b_1 - b_2 + e_1 - g_2)F - L((-2b_2 - c_{30} + 2d_1)c_1 + (b_1 + e_1)c_2 + c_{30}f_1)F + FM((a_2 + e_2)c_2 + 2c_1d_2 + c_{30}f_2) + Sf_2F) \\
 & F^3 + (EK(c_1e_3 + 2c_2g_3 + c_{30}(h_3 + b_3)) - K^3g_1 - K(L((b_1 + e_1)c_1 + 2c_2g_1 + c_{30}h_1) - M \\
 & ((2b_2 + c_{30} + 2g_2)c_2 + (a_2 + e_2)c_1 + h_2c_{30}) + S(c_1 - c_2 + f_1 - h_2)))F^3 + S(E(S + F(c_1 \\
 & f_3 + c_2h_3 + c_{30}^2 + 2c_{30}k_3)) - F(K^2h_1 + L(c_1^2 + c_1f_1 + c_2h_1 + 2c_{30}k_1) - M(c_1f_2 + c_2^2 + c_2 \\
 & h_2 + 2c_{30}k_2) - Sk_2))F - KS^2k_1F)) = F_1(\theta, r, W),
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \dot{W} = & \frac{\varepsilon}{F^2A_8\sqrt{-FA_8}}(F\sqrt{-FA_8}r \sin \theta((-Hc_2(Kb_1(a_2c_1 + c_{30}h_2) + Pb_2c_1h_2) - GP(c_1^2 + c_1f_1 + \\
 & c_2h_1 + 2c_{30}k_1)F + H((2b_2^2c_1c_2 + (-2b_1c_2^2 + c_1^2(a_2 + e_2))b_2 - b_1c_2^2(c_{30} + 2g_2))K + P(-c_1(\\
 & c_1f_2 + c_2^2 + 2c_{30}k_2)b_2 + b_1c_2(c_2h_2 + 2c_{30}k_2))) + FG((b_1 + e_1)c_1 + 2c_2g_1 + c_{30}h_1)K + (c_{30}^2 \\
 & P + F(2c_1d_3 + c_2e_3 + c_{30}f_3) - b_3c_{30}K)F^2 + (((-2b_2 - c_{30} + 2d_1)c_1 + (b_1 + e_1)c_2 + c_{30}f_1 \\
 &)GF - FH((a_2 + e_2)c_2 + c_{30}f_2 + 2c_1d_2) + K(c_1e_3 + 2c_2g_3 + c_{30}(h_3 + b_3))F - P(S + F(\\
 & c_1f_3 + c_2h_3 + c_{30}^2 + 2c_{30}k_3)))F - H(K(((c_{30} - 2g_2)c_2 - c_{30}h_2)b_2 + b_1c_2e_2)c_1 - Pb_1c_2(c_1 \\
 & f_2 + c_2^2)))W - c_{31}(F(Hc_2 + Pc_1) - 2Gc_1F)) - \sqrt{-FA_8}r^2 \cos \theta \sin \theta((c_{30}^2P + F(2c_1d_3 + \\
 & c_2e_3 + c_{30}f_3) - b_3c_{30}K)F^3 + F^3(((2b_2 - c_{30} + 2d_1)c_1 + (b_1 + e_1)c_2 + c_{30}f_1)G - ((a_2 + \\
 & e_2)c_2 + c_{30}f_2 + 2c_1d_2)H + K(c_1e_3 + 2c_2g_3 + c_{30}(h_3 + b_3))) + (KF(((b_1 + e_1)c_1 + 2c_2g_1 + \\
 & c_{30}h_1)G - ((2b_2 + c_{30} + 2g_2)c_2 + (a_2 + e_2)c_1 + c_{30}h_2)H) + S(S + F(c_1f_3 + c_2h_3 + c_{30}^2 + \\
 & 2c_{30}k_3)))F + SF((c_1^2 + c_1f_1 + c_2h_1 + 2c_{30}k_1)G - H(c_1f_2 + c_2^2 + c_2h_2 + 2c_{30}k_2))) - FA_8 \\
 & r^2 \sin^2 \theta(F(c_{30}S + (g_3c_2^2 + (c_1e_3 + c_{30}h_3)c_2 + c_{30}^2k_3 + c_1^2d_3 + c_1c_{30}f_3)F) + ((-b_2 + d_1)c_1^2 \\
 & + ((b_1 + e_1)c_2 + c_{30}f_1)c_1 + c_2^2g_1 + c_2c_{30}h_1 + c_{30}^2k_1)FG - ((b_2 + g_2 + c_{30})c_2^2 + ((a_2 + e_2)c_1 \\
 & + c_{30}h_2)c_2 + c_1c_{30}f_2 + c_{30}^2k_2 + c_1^2d_2)FH) - Fr \cos \theta((2d_3F^5 - (P(Ff_3 - Kb_3 + Pc_{30}) + \\
 & 2F(G(b_2 + c_{30} - d_1) + d_2H - e_3K))F^3 + (F(G(2(b_1 + e_1)K - P(c_1 + f_1)) - H(2(a_2 + \\
 & e_2)K - Pf_2) + K(2g_3K - (h_3 + b_3)P)) + S(Ff_3 - Kb_3 + Pc_{30}))F^2 + F^2((2Gg_1 - 2H \\
 & (b_2 + g_2))K^2 + (S(h_3 + b_3) - P(h_1G - (c_2 + h_2)H))K + S((c_1 + f_1)G - f_2H - 2P(k_3 + \\
 & c_{30}))) + SF(G(Kh_1 - 2Pk_1) - H((c_2 + h_2)K - 2Pk_2)))W - Fc_{31}(SF - F^2(G - P))) + \\
 & r^2 \cos^2 \theta(d_3F^6 - F^5(Gb_2 + Gc_{30} - Gd_1 + Hd_2 - Ke_3) + (KF((b_1 + e_1)G - H(a_2 + e_2) + \\
 & g_3K) + S(Ff_3 - Kb_3 + Pc_{30}))F^3 + F^3((Gg_1 - H(b_2 + g_2))K^2 + S((c_1 + f_1)G - f_2H + K \\
 & (h_3 + b_3))) + SF^2((h_1G - (c_2 + h_2)H)K + S(k_3 + c_{30})) + S^2F(Gk_1 - Hk_2)) + (d_3F^6 + (\\
 & -F(G(b_2 + c_{30} - d_1) + d_2H - e_3K) - P(Ff_3 - Kb_3 + Pc_{30}))F^4 + F^4(G((b_1 + e_1)K - P \\
 & (c_1 + f_1)) - H((a_2 + e_2)K - Pf_2) + K^2g_3 - KP(h_3 + b_3) + P^2(k_3 + c_{30})) + F^3(G(K^2g_1 - \\
 & KPh_1 + P^2k_1) - H((b_2 + g_2)K^2 - P(c_2 + h_2)K + P^2k_2)))W^2 + F^4GWc_{31}) = F_2(\theta, r, W).
 \end{aligned} \tag{3.36}$$

En calculant les intégrales (3.5), nous obtenons

$$f_1(r, W) = \frac{Fr(T_8W + N_8)}{2AE\sqrt{FA}}, \quad f_2(r, W) = -\frac{(D_8W^2 + R_8r^2 + C_8W)}{2FA\sqrt{FA}}.$$

Le système $f_1(r, W) = f_2(r, W) = 0$ a une solution unique (r^*, W^*) avec $r^* > 0$, à savoir

$$(r^*, W^*) = \left(\frac{1}{T_8} \sqrt{\frac{C_8 N_8 T_8 - D_8 N_8^2}{R_8}}, -\frac{N_8}{T_8} \right),$$

si $T_8 > 0$, $R_8(D_8 N_8^2 - C_8 N_8 T_8) > 0$, et le jacobien (3.6) en (r^*, W^*) est $N_8(C_8 T_8 - N_8 D_8)/(2T_8 A^3 F E) \neq 0$, où

$$\begin{aligned} T_8 = & (2d_3 E + 2L(b_2 + c_{30} - d_1) + 2M d_2) F^3 + (E(2K e_3 - P f_3) - 2K((b_1 + e_1)L - M(a_2 + e_2)) + P((c_1 + f_1)L - M f_2) - ((a_2 + e_2)c_2 + 2d_2 c_1 + c_{30} f_2) A_8) F^2 + ((2E g_3 - 2g_1 L + 2M(b_2 + g_2)) K^2 - (P((c_2 + h_2)M + E h_3 - L h_1) + A_8((b_2 + c_{30} - 2d_1 + e_2)c_1 + (2g_2 + b_2 - e_1)c_2 + (-f_1 + h_2)c_{30} - F + K)) K + P A_8(c_1 f_2 + c_2^2 + c_2 h_2 + 2c_{30} k_2) - E(P^2 c_{30} - S f_3) - S((c_1 + f_1)L - M f_2)) F + A_8((b_1 + e_1)c_1 + 2g_1 c_2 + c_{30} h_1) K^2 + (((c_2 + h_2)M + E h_3 - L h_1) S - A_8(c_1^2 + c_1 f_1 + c_2 h_1 + 2c_{30} k_1) P) K - ((c_{30} + 2k_3) E - 2L k_1 + 2M k_2) S P, \\ D_8 = & 2d_3 F^5 - (2(b_2 + c_{30} - d_1)G + 2d_2 H - 2e_3 K + 2f_3 P) F^4 + (2G((b_1 + e_1)K - P(c_1 + f_1)) - 2(K(a_2 + e_2) - f_2 P)H + 2g_3 K^2 - 2h_3 P K + 2k_3 P^2) F^3 + (2G(K^2 g_1 - K P h_1 + P^2 k_1) - 2H((b_2 + g_2)K^2 - P(c_2 + h_2)K + k_2 P^2)) F^2, \\ R_8 = & d_3 F^5 + (e_3 K - (b_2 + c_{30} - d_1)G - d_2 H) F^4 + (K((b_1 + e_1)G - H(a_2 + e_2)) + g_3 K^2 + S f_3) F^3 + (((-b_2 - g_2)H + G g_1) K^2 - A_8(k_3 c_{30}^2 + (c_1 f_3 + c_2 h_3) c_{30} + c_1^2 d_3 + c_1 c_2 e_3 + g_3 c_2^2) + ((c_1 + f_1)G + K h_3 - H f_2 + P c_{30}) S) F^2 + (G K S h_1 - H K S c_2 - H K S h_2 + c_{30} S^2 + S^2 k_3 - A_8(G((d_1 - b_2) c_1^2 + ((b_1 + e_1) c_2 + c_{30} f_1) c_1 + g_1 c_2^2 + c_2 c_{30} h_1 + k_1 c_{30}^2) - ((b_2 + c_{30} + g_2) c_2^2 + (h_2 c_{30} + c_1(a_2 + e_2)) c_2 + c_1^2 d_2 + c_1 f_2 c_{30} + k_2 c_{30}^2) H + S c_{30})) F + S^2 (G k_1 - H k_2), \\ N_8 = & -c_{31}(E F(G + P) + 2F^2 L - 2K A_8 c_1 + E S), \\ C_8 = & 2F^3 G c_{31}, \end{aligned}$$

alors, selon le Théorème 3.2.1, pour $\varepsilon > 0$ suffisamment petit et en revenant sur les changements de variables, le système (3.35) a une solution périodique $(X(t, \varepsilon), Y(t, \varepsilon), Z(t, \varepsilon))$ qui tend vers l'équilibre $(0, 0, 0)$ lorsque $\varepsilon \rightarrow 0$. Par conséquent, il existe une solution périodique partant du point d'équilibre de zéro-Hopf $(1, 1, 1)$ lorsque $\varepsilon = 0$. Cela achève la démonstration du Théorème 3.1.1 sous la condition (viii).

Exemple 8. Considérons le système de Kolmogorov

$$\begin{aligned} \dot{x} &= x(x - 2 + y + (x - 1)^2 + (x - 1)(y - 1) + (z - 1)^2), \\ \dot{y} &= y(-2x + 2 - y + z + (x - 1)^2 + (x - 1)(z - 1) + (y - 1)^2 + (z - 1)^2), \\ \dot{z} &= z(x - 1 - y + z + (x - 1)^2 + (y - 1)^2 + (y - 1)(z - 1) + (z - 1)^2). \end{aligned} \quad (3.37)$$

Ce système dans les variables (X, Y, Z) s'écrit

$$\begin{aligned} \dot{X} &= (X + 1)(X^2 + XY - 2X\varepsilon + Z^2 + Y), \\ \dot{Y} &= (Y + 1)(X^2 + XZ + Y^2 + Z^2 - 2X - Y + Z), \\ \dot{Z} &= (Z + 1)((-2X + Z)\varepsilon - 2X - Y + Z + X^2 + Y^2 + YZ + Z^2). \end{aligned}$$

Les deux composantes du système correspondant associé au système (3.36) sont

$$F_1(\theta, r, W) = -\frac{1}{8}(\sqrt{2}(-2 \cos(\theta)W(12W + 4) - 4 \cos^3(\theta)r^2 + 2 \cos^2(\theta)r(10W + 2) + 14 \sin(\theta) \sqrt{2}W^2 + 20 \sin^2(\theta)rW + 8\sqrt{2} \sin^3(\theta)r^2 - 2 \cos(\theta) \sin(\theta)\sqrt{2}r(15W + 1) + 12 \sin(\theta)\sqrt{2} \cos^2(\theta)r^2)),$$

$$F_2(\theta, r, W) = -\frac{\sqrt{2}}{4}(\sin(\theta)\sqrt{2}r(W - 1) + \cos(\theta) \sin(\theta)\sqrt{2}r^2 + 2 \sin^2(\theta)r^2 - \cos(\theta)r(-6W + 2) - 2W^2).$$

Pour rechercher les cycles limites, nous devons résoudre le système

$$f_1(r, W) = -\frac{r(20W + 2)\sqrt{2}}{8} = 0, \quad f_2(r, W) = -\frac{(-4W^2 + 2r^2)\sqrt{2}}{8} = 0.$$

Ce système a les solutions $(0, 0)$, $(\sqrt{2}/10, -1/10)$, $(-\sqrt{2}/10, -1/10)$. Ici, nous n'avons qu'une seule bonne solution, $(\sqrt{2}/10, -1/10)$. Le déterminant (3.6) en cette solution est $-1/20$. Ainsi, le système (3.37) a un seul cycle limite bifurquant du point d'équilibre $(1, 1, 1)$ en utilisant La théorie de moyennisation au premier ordre. Nous représentons ce cycle limite bifurqué pour $\varepsilon = 10^{-5}$ dans la Figure 3.8.

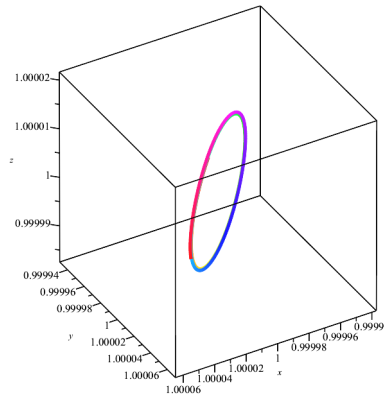


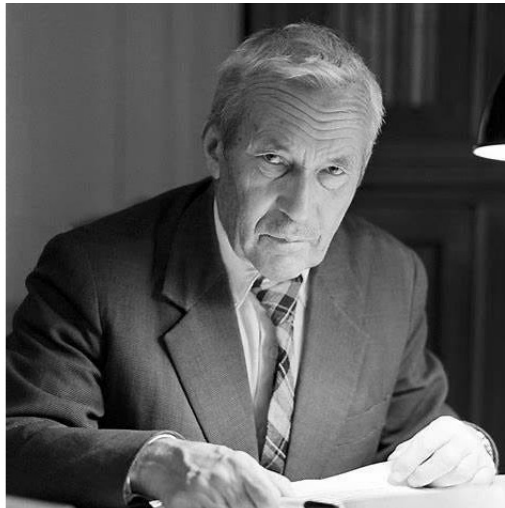
FIGURE 3.8: **CL** : $X(0) = 1 + \varepsilon(1 + \sqrt{2})/10$, $Y(0) = 1 + \varepsilon$, $Z(0) = 1 - \varepsilon/10$.

Les valeurs propres de la matrice jacobienne de (f_1, f_2) en $(\sqrt{2}/10, -1/10)$ sont $(-\sqrt{2} \pm \sqrt{22})/20$. Ainsi, ce cycle limite est instable.

3.4 Conclusion

Nous avons classé tous les équilibres zéro-Hopf des systèmes de Kolmogorov de degré 3 dans \mathbb{R}^3 , voir la Proposition 1, obtenant huit familles de tels systèmes de Kolmogorov exhibant des équilibres zéro-Hopf. De plus, en utilisant La théorie de moyennisation du premier ordre dans le Théorème 3.1.1, nous avons caractérisé les cycles limites qui bifurquent de ces équilibres zéro-Hopf. Enfin, nous avons fourni des exemples explicites des cycles limites bifurquant des huit familles d'équilibres zéro-Hopf.

Voici la photographie d'Andrey Nikolaevich Kolmogorov



Andrey Nikolaevich Kolmogorov (1903 - 1987)

Bifurcation zéro-Hopf dans un système différentiel polynômial quartique dans \mathbb{R}^4 utilisant la théorie de moyennisation du 3^{ème} ordre

4.1 Introduction

La théorie de moyennisation est une technique bien établie et sophistiquée qui nous permet d'étudier le comportement des systèmes différentiels non linéaires sous stimulation périodique. L'histoire extensive de La théorie de moyennisation trouve son origine dans les contributions classiques de Lagrange et Laplace, qui ont offert une justification rationnelle de la méthode. En 1928, Fatou a fourni la première formalisation de cette théorie [19]. Des avancées pratiques et théoriques significatives dans le domaine de La théorie de moyennisation ont été réalisées dans les années 1930 par Bogoliubov et Krylov [31], et en 1945 par Bogoliubov [6]. En 2004, Buică et Llibre ont utilisé le degré de Brouwer pour étendre l'application de La théorie de moyennisation dans l'analyse des orbites périodiques dans les systèmes différentiels continus [14]. Pour une introduction complète à cette théorie, nous nous référons au livre de Sanders, Verhulst et Murdock [49].

Un équilibre zéro-Hopf dans \mathbb{R}^n avec $n \geq 3$ est un point d'équilibre isolé dans l'ensemble de tous les points d'équilibre du système différentiel, ayant les valeurs propres $\pm bi$ avec $b \neq 0$ et la valeur propre 0 avec une multiplicité de $n - 2$.

Dans l'article [39], il a été prouvé que $2^{(n-3)}$ solutions périodiques peuvent bifurquer à partir d'un équilibre zéro-Hopf d'un système différentiel polynômial dans \mathbb{R}^n pour $n \geq 3$ en utilisant La théorie de moyennisation du premier ordre.

Les auteurs ont étudié la bifurcation zéro-Hopf dans les systèmes différentiels polynômiaux dans \mathbb{R}^3 avec des non-linéarités quadratiques homogènes. Ils ont utilisé La théorie de moyennisation du troisième et du deuxième ordre dans leurs études respectives, comme indiqué dans les références [4] et [34]. Il a été démontré qu'un point singulier avec des valeurs propres de la forme $\pm bi$ et 0 peut donner naissance à un maximum de 10 cycles limites et un minimum de 3 cycles limites par bifurcation.

Les auteurs dans [20] ont étudié la bifurcation zéro-Hopf dans les systèmes différentiels polynômiaux dans \mathbb{R}^4 avec des non-linéarités cubiques homogènes, en utilisant La théorie de

moyennisation du second ordre. Il a été démontré qu'un maximum de 9 cycles limites peut émerger d'un point singulier avec des valeurs propres de la forme $\pm bi$ et deux zéros.

Les auteurs dans [17] ont examiné la bifurcation zéro-Hopf d'un système différentiel polynômial quadratique en quatre dimensions en utilisant La théorie de moyennisation du troisième ordre.

Cet article vise à analyser le nombre des cycles limites qui peuvent bifurquer d'un point d'équilibre zéro-Hopf d'un système différentiel polynômial dans \mathbb{R}^4 avec des non-linéarités homogènes **quartiques**. L'analyse sera conduite en utilisant La théorie de moyennisation du troisième ordre. Plus précisément, nous examinons les systèmes différentiels ayant la forme suivante

$$\begin{aligned}
 \dot{x} &= (a_1\epsilon + a_2\epsilon^2 + a_3\epsilon^3)x - (b + b_1\epsilon + b_2\epsilon^2 + b_3\epsilon^3)y + \sum_{j=0}^2 \epsilon^j X_j(x, y, z, w), \\
 \dot{y} &= (b + b_1\epsilon + b_2\epsilon^2 + b_3\epsilon^3)x + (a_1\epsilon + a_2\epsilon^2 + a_3\epsilon^3)y + \sum_{j=0}^2 \epsilon^j Y_j(x, y, z, w), \\
 \dot{z} &= (c_1\epsilon + c_2\epsilon^2 + c_3\epsilon^3)z + \sum_{j=0}^2 \epsilon^j Z_j(x, y, z, w), \\
 \dot{w} &= (d_1\epsilon + d_2\epsilon^2 + d_3\epsilon^3)w + \sum_{j=0}^2 \epsilon^j W_j(x, y, z, w),
 \end{aligned} \tag{4.1}$$

où

$$\begin{aligned}
 X_j(x, y, z, w) &= a_{j0}x^4 + a_{j1}x^3y + a_{j2}x^3z + a_{j3}x^3w + a_{j4}x^2y^2 + a_{j5}x^2z^2 + a_{j6}x^2w^2 + a_{j7}x^2yz + \\
 &+ a_{j8}x^2yw + a_{j9}x^2zw + a_{j10}xy^3 + a_{j11}xz^3 + a_{j12}xw^3 + a_{j13}xy^2z + a_{j14}xy^2w + \\
 &+ a_{j15}xz^2y + a_{j16}xz^2w + a_{j17}xw^2y + a_{j18}xw^2z + a_{j19}xyzw + a_{j20}y^4 + a_{j21}y^3z + \\
 &+ a_{j22}wy^3 + a_{j23}y^2z^2 + a_{j24}w^2y^2 + a_{j25}wy^2z + a_{j26}yz^3 + a_{j27}w^3y + a_{j28}wyz^2 + \\
 &+ a_{j29}w^2yz + a_{j30}z^4 + a_{j31}wz^3 + a_{j32}w^2z^2 + a_{j33}w^3z + a_{j34}w^4,
 \end{aligned}$$

$Y_j(x, y, z, w)$, $Z_j(x, y, z, w)$ et $W_j(x, y, z, w)$ ont la même expression que $X_j(x, y, z, w)$ en remplaçant a_{ji} par b_{ji} , c_{ji} et d_{ji} pour $j = 0, 1, 2$ et $i = 0, 1, \dots, 34$, respectivement. Les coefficients a_{ij} , b_{ij} , c_{ij} , d_{ij} , $a_1, a_2, a_3, b, b_1, b_2, b_3, c_1, c_2, c_3, d_1, d_2, d_3$ sont des paramètres réels avec $b \neq 0$. Notez que le système (4.1) pour $\epsilon = 0$ à l'origine a des valeurs propres $\pm bi, 0, 0$. Donc, pour $\epsilon = 0$, l'origine est un *équilibre zéro-Hopf*.

Notre principal résultat est le suivant.

Théorème 4.1.1 *En appliquant La théorie de moyennisation du troisième ordre, le système (4.1) a au plus 36 solutions périodiques bifurquant de l'origine lorsque $\epsilon = 0$, si et seulement si la condition suivante est satisfaite : $b((a_{013} + 3b_{021} + 3a_{02} + b_{07})\beta + \xi(a_{014} + 3b_{022} + 3a_{03} + b_{08}))^2 \neq 0$.*

Le théorème 4.1.1 est démontré dans la section 4.3 en utilisant La théorie de moyennisation pour calculer les orbites périodiques. Un résumé des résultats de La théorie de moyennisation dont nous avons besoin pour prouver le théorème 4.1.1 est présenté dans la section 4.2. Nous utiliserons le théorème de Bézout. Ce théorème donne le nombre maximal de zéros d'un système de fonctions polynomiales.

Théorème 4.1.2 *(Théorème de Bézout).*

Soient P_i des polynômes dans les variables $(y_1, \dots, y_n) \in \mathbb{R}^n$ de degré d_i pour $i = 1, \dots, n$. Considérons le système polynomial suivant

$$P_i(y_1, \dots, y_n) = 0, \quad i = 1, \dots, n.$$

Si le nombre de solutions de ce système est fini, alors il est borné par $d_1 \times d_2 \times \dots \times d_n$.

Consultez [52] pour plus de détails sur le théorème de Bézout.

Corollaire 1 *Considérez le système*

$$\begin{aligned}
 \dot{x} &= -x\epsilon^3 - (\epsilon^3 + \epsilon^2 + \epsilon + 1)y - \frac{5x^3w}{3} - xw^3 - xz^3 + w^4 + w^2xy - w^2xz + wxy^2 - 3wxz^2 + \\
 &\quad x^2yz + xy^2z + xy^2z^2 + y^4, \\
 \dot{y} &= (\epsilon^3 + \epsilon^2 + \epsilon + 1)x - y\epsilon^3 + 2w^4 + w^3y + wy^3 + 3wz^3 + x^3y + 2y^4 - yz^3 - w^2yz + wx^2y + \\
 &\quad wyz^2 + x^2yz, \\
 \dot{z} &= -\frac{41}{4}\epsilon^3z + y^2z^2 + w^2y^2 + x^2y^2 + x^2z^2 - 4wz^3 + 4w^3z - 3x^2w^2 - 2w^2z^2 + 2w^4 - \frac{23}{4}z^4 + \\
 &\quad y^4 - x^4 - wx^2z - wy^2z, \\
 \dot{w} &= -\frac{206}{7}\epsilon^3w + wy^2z + x^2zw + y^2z^2 + w^2y^2 + \frac{1331}{28}w^2z^2 + x^2y^2 - \frac{60}{7}w^3z - \frac{1377}{56}x^2z^2 - \\
 &\quad \frac{213}{14}x^2w^2 - \frac{347}{28}wz^3 + \frac{209}{14}w^4 + \frac{705}{14}z^4 + y^4 + x^4.
 \end{aligned} \tag{4.2}$$

Dans ce système

$$\begin{aligned}
 a_{07} &= a_{013} = a_{014} = a_{015} = a_{017} = a_{020} = a_{034} = b = b_1 = b_2 = b_3 = b_{01} = b_{07} = b_{08} = b_{022} = \\
 b_{027} &= b_{028} = c_{04} = c_{05} = c_{020} = c_{023} = c_{024} = d_{00} = d_{04} = d_{09} = d_{020} = d_{023} = d_{024} = d_{025} = 1, \\
 a_3 &= a_{011} = a_{012} = a_{018} = b_{026} = b_{029} = c_{00} = c_{09} = c_{025} = -1, \\
 b_{020} &= b_{034} = c_{034} = 2, \\
 a_{016} &= c_{06} = -3, \\
 c_{033} &= -c_{031} = 4, \\
 a_{03} &= -5/3, b_{031} = 3, c_3 = -41/4, c_{030} = -23/4, c_{032} = -2, d_3 = -206/7, d_{05} = -1377/56, \\
 d_{06} &= -213/14, d_{030} = 705/14, d_{031} = -347/28, d_{032} = 1331/28, d_{033} = -60/7, \\
 d_{034} &= 209/14, \text{ et pour les coefficients restants, ils sont tous nuls.}
 \end{aligned}$$

Ce système a huit solutions périodiques bifurquant de l'équilibre zéro-Hopf situé à l'origine des coordonnées lorsque $\epsilon = 0$.

Le Corollaire 1 est démontré dans la section 3.

4.2 Théorie de moyennisation du premier, deuxième et troisième ordre

Dans cette section, nous rappelons La théorie de moyennisation du premier, deuxième et du troisième ordre telle qu'elle a été développée dans [14] et [37]. Cela sera l'outil principal pour prouver le Théorème 4.1.1.

Théorème 4.2.1 *Considérons le système différentiel*

$$x'(t) = \epsilon G_1(t, x) + \epsilon^2 G_2(t, x) + \epsilon^3 G_3(t, x) + \epsilon^4 R(t, x, \epsilon), \tag{4.3}$$

où $G_3, G_2, G_1 : \mathbb{R} \times D \rightarrow \mathbb{R}^n, R : \mathbb{R} \times D \times (-\epsilon_f, \epsilon_f) \rightarrow \mathbb{R}^n$ sont T -périodiques dans la première variable, des fonctions continues et D est un sous-ensemble ouvert de \mathbb{R}^n . Supposons que les hypothèses suivantes (i) et (ii) sont satisfaites.

(i) $G_1(t, \cdot) \in C^2(D), G_2(t, \cdot) \in C^1(D)$ pour tout $t \in \mathbb{R}, G_3, G_2, G_1, R, D_x^2 G_1, D_x G_2$ sont

localement lipschitziennes par rapport à x , et R est deux fois différentiable par rapport à ϵ .

Nous définissons $G_{k0} \rightarrow \mathbb{R}^n$ pour $k = 1, 2, 3$ comme

$$\begin{aligned} G_{10}(z) &= \frac{1}{T} \int_0^T G_1(s, z) ds, \\ G_{20}(z) &= \frac{1}{T} \int_0^T [D_z G_1(s, z) \cdot y_1(s, z) + G_2(s, z)] ds, \\ G_{30}(z) &= \frac{1}{T} \int_0^T \left[\frac{1}{2} y_1(s, z)^T \frac{\partial^2 G_1}{\partial z^2}(s, z) y_1(s, z) + \frac{1}{2} \frac{\partial G_1}{\partial z}(s, z) y_2(s, z) + \frac{\partial G_2}{\partial z}(s, z) (y_1(s, z)) + G_3(s, z) \right] ds, \end{aligned}$$

où

$$\begin{aligned} y_1(s, z) &= \int_0^s G_1(t, z) dt, \\ y_2(s, z) &= \int_0^s \left[\frac{\partial G_1}{\partial z}(t, z) \int_0^t G_1(r, z) dr + G_2(t, z) \right] dt. \end{aligned}$$

(ii) Pour $I \subset D$ un ensemble ouvert et borné et pour chaque $\epsilon \in (-\epsilon_f, \epsilon_f) \setminus \{0\}$, il existe $a_\epsilon \in I$ tel que $G_{10}(a_\epsilon) + \epsilon G_{20}(a_\epsilon) + \epsilon^2 G_{30}(a_\epsilon) = 0$ et $d_B(G_{10} + \epsilon G_{20} + \epsilon^2 G_{30}, I, a_\epsilon) \neq 0$.

Alors, pour $|\epsilon| > 0$ suffisamment petit, il existe une solution T -périodique $\varphi(\cdot, \epsilon)$ du système (4.3) telle que $\varphi(0, \epsilon) = a_\epsilon$.

L'expression $d_B(G_{10} + \epsilon G_{20} + \epsilon^2 G_{30}, I, a_\epsilon) \neq 0$ signifie que le degré de Brouwer de la fonction $G_{10} + \epsilon G_{20} + \epsilon^2 G_{30} : I \rightarrow \mathbb{R}^n$ au point fixe a_ϵ n'est pas nul. Une condition suffisante pour que l'inégalité soit vraie est que le jacobien de la fonction $G_{10} + \epsilon G_{20} + \epsilon^2 G_{30}$ en a_ϵ ne soit pas nul.

Si G_{10} n'est pas identiquement nul, alors les zéros de $G_{10} + \epsilon G_{20} + \epsilon^2 G_{30}$ sont principalement les zéros de G_{10} pour ϵ suffisamment petit. Dans ce cas, le résultat précédent fournit *La théorie de moyennisation du premier ordre*.

Si G_{10} est identiquement nul et que G_{20} n'est pas identiquement nul, alors les zéros de $G_{10} + \epsilon G_{20} + \epsilon^2 G_{30}$ sont principalement les zéros de G_{20} pour ϵ suffisamment petit. Dans ce cas, le résultat précédent fournit *La théorie de moyennisation du deuxième ordre*.

Si G_{10} et G_{20} sont identiquement nuls et que G_{30} n'est pas identiquement nul, alors les zéros de $G_{10} + \epsilon G_{20} + \epsilon^2 G_{30}$ sont principalement les zéros de G_{30} pour ϵ suffisamment petit. Dans ce cas, le résultat précédent fournit *La théorie de moyennisation du troisième ordre*.

Pour plus d'informations sur La théorie de moyennisation, consultez [51] et [47].

4.3 Preuve du théorème 4.1.1 et du corollaire 3

Preuve 10 (Preuve du Théorème 4.1.1) Pour prouver le Théorème 4.1.1, nous devons écrire le système (4.1) sous forme normale pour appliquer la théorie de l'approximation de la Section 4.2. Premièrement, nous redimensionnons les variables, en fixant $(x, y, z, w) = (\epsilon X, \epsilon Y, \epsilon Z, \epsilon W)$.

Deuxièmement, en passant aux coordonnées cylindriques $(X, Y, Z, W) = (\alpha \cos \theta, \alpha \sin \theta, \beta, \xi)$. Enfin, nous prenons l'angle θ comme nouvelle variable indépendante. Ainsi, dans les variables (α, β, ξ) , le système (4.1) s'écrit

$$\begin{aligned} \frac{d\alpha}{d\theta} &= \epsilon G_{11}(\theta, \alpha, \beta, \xi) + \epsilon^2 G_{21}(\theta, \alpha, \beta, \xi) + \epsilon^3 G_{31}(\theta, \alpha, \beta, \xi) + O(\epsilon^4), \\ \frac{d\beta}{d\theta} &= \epsilon G_{12}(\theta, \alpha, \beta, \xi) + \epsilon^2 G_{22}(\theta, \alpha, \beta, \xi) + \epsilon^3 G_{32}(\theta, \alpha, \beta, \xi) + O(\epsilon^4), \\ \frac{d\xi}{d\theta} &= \epsilon G_{13}(\theta, \alpha, \beta, \xi) + \epsilon^2 G_{23}(\theta, \alpha, \beta, \xi) + \epsilon^3 G_{33}(\theta, \alpha, \beta, \xi) + O(\epsilon^4). \end{aligned} \quad (4.4)$$

où

$$\begin{aligned} G_{11}(\theta, \alpha, \beta, \xi) &= \frac{a_1 \alpha}{b}, & G_{21}(\theta, \alpha, \beta, \xi) &= \frac{(ba_2 - a_1 b_1) \alpha}{b^2}, \\ G_{12}(\theta, \alpha, \beta, \xi) &= \frac{c_1 \beta}{b}, & G_{22}(\theta, \alpha, \beta, \xi) &= \frac{(bc_2 - b_1 c_1) \beta}{b^2}, \\ G_{13}(\theta, \alpha, \beta, \xi) &= \frac{d_1 \xi}{b}, & G_{23}(\theta, \alpha, \beta, \xi) &= \frac{(bd_2 - b_1 d_1) \xi}{b^2}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} G_{31}(\theta, \alpha, \beta, \xi) &= \frac{1}{b^3} (-b^2 \alpha^4 (a_{04} + b_{01} - a_{020} - b_{010} - a_{00}) \cos(\theta)^5 + (\alpha (a_{01} - a_{010} + b_{00} - b_{04} + \\ &b_{020}) \sin(\theta) + (a_{02} - b_{07} - a_{013} + b_{021}) \beta + \xi (a_{03} - b_{08} - a_{014} + b_{022})) \alpha^3 b^2 \cos(\theta)^4 + (\alpha ((a_{07} + b_{02} \\ &- a_{021} - b_{013}) \beta + \xi (a_{08} + b_{03} - a_{022} - b_{014})) \sin(\theta) + (a_{04} + b_{01} - 2a_{020} - 2b_{010}) \alpha^2 + (a_{05} - a_{023} \\ &- b_{015}) \beta^2 + \xi (a_{09} - a_{025} - b_{019}) \beta + \xi^2 (a_{06} - a_{024} - b_{017})) \alpha^2 b^2 \cos(\theta)^3 + \alpha (\alpha ((b_{04} + a_{010} - 2b_{020}) \\ &\alpha^2 + (b_{05} + a_{015} - b_{023}) \beta^2 + \xi (b_{09} + a_{019} - b_{025}) \beta + \xi^2 (b_{06} + a_{017} - b_{024})) \sin(\theta) + ((b_{07} + a_{013} - \\ &2b_{021}) \beta + \xi (b_{08} + a_{014} - 2b_{022})) \alpha^2 + (a_{011} - b_{026}) \beta^3 + \xi (a_{016} - b_{028}) \beta^2 + \xi^2 (a_{018} - b_{029}) \beta + \xi^3 (\\ &a_{012} - b_{027})) b^2 \cos(\theta)^2 + (\alpha (((a_{021} + b_{013}) \beta + \xi (a_{022} + b_{014})) \alpha^2 + (a_{026} + b_{011}) \beta^3 + \xi (a_{028} + b_{016}) \\ &\beta^2 + \xi^2 (a_{029} + b_{018}) \beta + \xi^3 (a_{027} + b_{012})) \sin(\theta) + (a_{020} + b_{010}) \alpha^4 + ((a_{023} + b_{015}) \beta^2 + \xi (a_{025} + \\ &b_{019}) \beta + \xi^2 (a_{024} + b_{017})) \alpha^2 + a_{034} \xi^4 + a_{033} \xi^3 \beta + \beta^2 \xi^2 a_{032} + \beta^3 \xi a_{031} + \beta^4 a_{030}) b^2 \cos(\theta) + b^2 (\alpha^4 \\ &b_{020} + (\beta^2 b_{023} + \beta \xi b_{025} + \xi^2 b_{024}) \alpha^2 + \xi^4 b_{034} + \xi^3 b_{033} \beta + \xi^2 b_{032} \beta^2 + \xi b_{031} \beta^3 + b_{030} \beta^4) \sin(\theta) + \alpha (\\ &((\beta b_{021} + \xi b_{022}) \alpha^2 + \xi^3 b_{027} + \beta \xi^2 b_{029} + \beta^2 \xi b_{028} + \beta^3 b_{026} + a_3) b^2 + (-a_1 b_2 - a_2 b_1) b + a_1 b_1^2), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} G_{32}(\theta, \alpha, \beta, \xi) &= \frac{1}{b^3} (b^2 \alpha^4 (c_{00} - c_{04} + c_{020}) \cos(\theta)^4 + \alpha^3 b^2 (\alpha (c_{01} - c_{010}) \sin(\theta) + (c_{02} - c_{013}) \beta + \xi \\ &(c_{03} - c_{014})) \cos(\theta)^3 + (\alpha ((c_{07} - c_{021}) \beta + \xi (c_{08} - c_{022})) \sin(\theta) + (c_{04} - 2c_{020}) \alpha^2 + (c_{05} - c_{023}) \beta^2 \\ &+ \xi (c_{09} - c_{025}) \beta + \xi^2 (c_{06} - c_{024})) \alpha^2 b^2 \cos(\theta)^2 + (\alpha (\beta^2 c_{015} + \beta \xi c_{019} + \alpha^2 c_{010} + \xi^2 c_{017}) \sin(\theta) + (\\ &\beta c_{013} + \xi c_{014}) \alpha^2 + \xi^3 c_{012} + \xi^2 c_{018} \beta + \xi c_{016} \beta^2 + c_{011} \beta^3) \alpha b^2 \cos(\theta) + \alpha ((\beta c_{021} + \xi c_{022}) \alpha^2 + \xi^3 c_{027} \\ &+ \xi^2 c_{029} \beta + \xi c_{028} \beta^2 + c_{026} \beta^3) b^2 \sin(\theta) + (\alpha^4 c_{020} + (\beta^2 c_{023} + \beta \xi c_{025} + \xi^2 c_{024}) \alpha^2 + \beta^4 c_{030} + \beta^3 \xi \\ &c_{031} + \beta^2 \xi^2 c_{032} + (\xi^3 c_{033} + c_3) \beta + \xi^4 c_{034}) b^2 - \beta (b_1 c_2 + b_2 c_1) b + \beta b_1^2 c_1, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} G_{33}(\theta, \alpha, \beta, \xi) &= \frac{1}{b^3} (b^2 \alpha^4 (d_{00} - d_{04} + d_{020}) \cos(\theta)^4 + \alpha^3 b^2 (\alpha (d_{01} - d_{010}) \sin(\theta) + \xi (d_{03} - d_{014}) + \\ &\beta (d_{02} - d_{013})) \cos(\theta)^3 + (\alpha (\xi (d_{08} - d_{022}) + \beta (d_{07} - d_{021})) \sin(\theta) + (d_{04} - 2d_{020}) \alpha^2 + \xi^2 (d_{06} - \\ &d_{024}) + \beta (d_{09} - d_{025}) \xi + \beta^2 (d_{05} - d_{023})) \alpha^2 b^2 \cos(\theta)^2 + (\alpha (\beta^2 d_{015} + \beta \xi d_{019} + \alpha^2 d_{010} + \xi^2 d_{017}) \\ &\sin(\theta) + (\beta d_{013} + \xi d_{014}) \alpha^2 + \xi^3 d_{012} + d_{018} \beta \xi^2 + d_{016} \beta^2 \xi + d_{011} \beta^3) \alpha b^2 \cos(\theta) + \alpha ((\beta d_{021} + \xi d_{022}) \end{aligned}$$

$$\alpha^2 + \xi^3 d_{027} + \beta d_{029} \xi^2 + \beta^2 d_{028} \xi + \beta^3 d_{026} b^2 \sin(\theta) + (\alpha^4 d_{020} + (\beta^2 d_{023} + \beta \xi d_{025} + \xi^2 d_{024}) \alpha^2 + \xi^4 d_{034} + \beta \xi^3 d_{033} + \beta^2 \xi^2 d_{032} + (\beta^3 d_{031} + d_3) \xi + \beta^4 d_{030}) b^2 - \xi(b_1 d_2 + b_2 d_1) b + \xi b_1^2 d_1).$$

On prenant

$$\begin{aligned} x = z &= (\alpha, \beta, \xi), \\ t &= \theta, \\ G_1(t, x) &= (G_{11}(\theta, \alpha, \beta, \xi), G_{12}(\theta, \alpha, \beta, \xi), G_{13}(\theta, \alpha, \beta, \xi)), \\ G_2(t, x) &= (G_{21}(\theta, \alpha, \beta, \xi), G_{22}(\theta, \alpha, \beta, \xi), G_{23}(\theta, \alpha, \beta, \xi)), \\ G_3(t, x) &= (G_{31}(\theta, \alpha, \beta, \xi), G_{32}(\theta, \alpha, \beta, \xi), G_{33}(\theta, \alpha, \beta, \xi)), \\ T &= 2\pi. \end{aligned}$$

. Le système (4.4) devient équivalent au système (4.3). En appliquant La théorie de moyennisation du premier ordre au système (4.4), nous avons que $g_1 = (g_{11}, g_{12}, g_{13})$, où pour $i = 1, 2, 3$

$$g_{1i}(\alpha, \beta, \xi) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} G_{1i}(\theta, \alpha, \beta, \xi) d\theta.$$

En effectuant ces calculs, nous obtenons que

$$\begin{cases} g_{11}(\alpha, \beta, \xi) = \frac{\alpha a_1}{b}, \\ g_{12}(\alpha, \beta, \xi) = \frac{\beta c_1}{b}, \\ g_{13}(\alpha, \beta, \xi) = \frac{\xi d_1}{b}. \end{cases} \quad (4.5)$$

Comme nous recherchons des solutions $(\alpha^*, \beta^*, \xi^*)$ de $g_1(\alpha, \beta, \xi) = 0$ avec $\alpha^* > 0$, la première fonction moyenné ne fournit aucune information sur les solutions périodiques du système différentiel (4.4). Pour que la deuxième fonction moyenné puisse fournir des informations sur les solutions périodiques du système différentiel (4.4), le premier système moyenné doit être identiquement nul. Nous prenons donc $a_1 = c_1 = d_1 = 0$, et on calcule la deuxième fonction moyenné.

Alors, à partir de (4.4), nous avons que $g_2 = (g_{21}, g_{22}, g_{23}) = (g_{21}(\alpha, \beta, \xi), g_{22}(\alpha, \beta, \xi), g_{23}(\alpha, \beta, \xi))$ est donné par

$$\begin{cases} g_{21}(\alpha, \beta, \xi) = \frac{\alpha a_2}{b}, \\ g_{22}(\alpha, \beta, \xi) = \frac{\beta c_2}{b}, \\ g_{23}(\alpha, \beta, \xi) = \frac{\xi d_2}{b}. \end{cases} \quad (4.6)$$

Par conséquent, le deuxième système moyenné (4.6) ne fournit aucune information sur les cycles limites du système différentiel (4.4). Étant donné que le troisième système moyenné peut fournir des informations sur les cycles limites du système différentiel (4.4), nous avons besoin que le deuxième système moyenné soit identiquement nul. Nous prenons donc $a_2 = c_2 = d_2 = 0$, nous calculons la troisième fonction moyenné $g_3 = (g_{31}, g_{32}, g_{33}) = (g_{31}(\alpha, \beta, \xi), g_{32}(\alpha, \beta, \xi), g_{33}(\alpha, \beta, \xi))$ et nous obtenons

$$\left\{ \begin{array}{l} g_{31}(\alpha, \beta, \xi) = \frac{1}{8b}(\alpha(4\beta^3 a_{011} + 4\beta^3 b_{026} + 4\beta^2 \xi a_{016} + 4\beta^2 \xi b_{028} + 3\beta \alpha^2 a_{02} + \beta \alpha^2 a_{013} + \beta \alpha^2 b_{07} + \\ 3\beta \alpha^2 b_{021} + 4\beta \xi^2 a_{018} + 4\beta \xi^2 b_{029} + 3\alpha^2 \xi a_{03} + \alpha^2 \xi a_{014} + \alpha^2 \xi b_{08} + 3\alpha^2 \xi b_{022} + 4\xi^3 \\ a_{012} + 4\xi^3 b_{027} + 8a_3)), \\ g_{32}(\alpha, \beta, \xi) = \frac{1}{8b}(8\beta^4 c_{030} + 8\beta^3 \xi c_{031} + 4\beta^2 \alpha^2 c_{05} + 4\beta^2 \alpha^2 c_{023} + 8\beta^2 \xi^2 c_{032} + 4\beta \alpha^2 \xi c_{09} + 4\beta \alpha^2 \xi \\ c_{025} + 8\beta \xi^3 c_{033} + 3\alpha^4 c_{00} + \alpha^4 c_{04} + 3\alpha^4 c_{020} + 4\alpha^2 \xi^2 c_{06} + 4\alpha^2 \xi^2 c_{024} + 8\xi^4 c_{034} + \\ 8\beta c_3), \\ g_{33}(\alpha, \beta, \xi) = \frac{1}{8b}(8\beta^4 d_{030} + 8\beta^3 \xi d_{031} + 4\beta^2 \alpha^2 d_{05} + 4\beta^2 \alpha^2 d_{023} + 8\beta^2 \xi^2 d_{032} + 4\beta \alpha^2 \xi d_{09} + 4\beta \alpha^2 \\ \xi d_{025} + 8\beta \xi^3 d_{033} + 3\alpha^4 d_{00} + \alpha^4 d_{04} + 3\alpha^4 d_{020} + 4\alpha^2 \xi^2 d_{06} + 4\alpha^2 \xi^2 d_{024} + 8\xi^4 d_{034} \\ + 8\xi d_3). \end{array} \right. \quad (4.7)$$

Pour rechercher les cycles limites du système (4.1) par la théorie de moyennisation, nous devons calculer les racines réelles isolées du système moyenné (4.7) avec $\alpha > 0$. Nous isolons α^2 de l'équation $g_{31}(\alpha, \beta, \xi) = 0$, et nous le substituons dans $g_{3i}(\alpha, \beta, \xi) = 0$ pour $i = 2, 3$. Ensuite, nous obtenons deux fonctions $(h_{32}, h_{33}) = (h_{32}(\beta, \xi), h_{33}(\beta, \xi))$ données par

$$\begin{aligned} h_{32} &= \frac{1}{S}(C_0 + C_1 \beta \xi^2 + C_2 \beta \xi^5 + C_3 \beta^2 \xi + C_4 \beta^2 \xi^4 + C_5 \beta^3 + C_6 \beta^3 \xi^3 + C_7 \beta^4 \xi^2 + C_8 \beta^5 \xi + C_9 \beta^6 \\ &\quad + C_{10} \xi^3 + C_{11} \xi^6), \\ h_{33} &= \frac{1}{S}(E_0 + E_1 \beta \xi^2 + E_2 \beta \xi^5 + E_3 \beta^2 \xi + E_4 \beta^2 \xi^4 + E_5 \beta^3 + E_6 \beta^3 \xi^3 + E_7 \beta^4 \xi^2 + E_8 \beta^5 \xi + E_9 \beta^6 \\ &\quad + E_{10} \xi^3 + E_{11} \xi^6), \end{aligned}$$

où

$$S = b((a_{013} + 3b_{021} + 3a_{02} + b_{07})\beta + \xi(a_{014} + 3b_{022} + 3a_{03} + b_{08}))^2 \neq 0,$$

$$C_0 = 8a_3^2(3c_{020} + 3c_{00} + c_{04}),$$

$$C_1 = ((-4c_{09} - 4c_{025})a_{014} + (-12c_{09} - 12c_{025})b_{022} + (-12c_{09} - 12c_{025})a_{03} + (-4c_{09} - 4c_{025}) \\ b_{08} + (-4a_{013} - 12b_{021} - 12a_{02} - 4b_{07})c_{024} + (-4a_{013} - 12b_{021} - 12a_{02} - 4b_{07})c_{06} + 8(\\ 3c_{020} + 3c_{00} + c_{04})(a_{018} + b_{029}))a_3 + c_3(a_{014} + 3b_{022} + 3a_{03} + b_{08})^2,$$

$$C_2 = ((-2c_{09} - 2c_{025})a_{014} + (-6c_{09} - 6c_{025})b_{022} + (-2a_{013} - 6b_{021} - 6a_{02} - 2b_{07})c_{024} + (- \\ 6c_{09} - 6c_{025})a_{03} + (-2c_{09} - 2c_{025})b_{08} + (-2a_{013} - 6b_{021} - 6a_{02} - 2b_{07})c_{06} + 4(3c_{020} + \\ 3c_{00} + c_{04})(a_{018} + b_{029}))a_{012} + ((-2c_{09} - 2c_{025})a_{014} + (-6c_{09} - 6c_{025})b_{022} + (-2a_{013} - \\ 6b_{021} - 6a_{02} - 2b_{07})c_{024} + (-6c_{09} - 6c_{025})a_{03} + (-2c_{09} - 2c_{025})b_{08} + (-2a_{013} - 6b_{021} - \\ 6a_{02} - 2b_{07})c_{06} + 4(3c_{020} + 3c_{00} + c_{04})(a_{018} + b_{029}))b_{027} + (a_{014} + 3b_{022} + 3a_{03} + b_{08})(c_{033} \\ a_{014} + 3c_{033}b_{022} + 2(-a_{018} - b_{029})c_{024} + 2(a_{013} + 3b_{021} + 3a_{02} + b_{07})c_{034} + 3c_{033}a_{03} + b_{08} \\ c_{033} - 2c_{06}(a_{018} + b_{029})),$$

$$C_3 = ((-4c_{09} - 4c_{025})a_{013} + (-4c_{023} - 4c_{05})a_{014} + (-12c_{09} - 12c_{025})b_{021} + (-12c_{023} - 12c_{05}) \\ b_{022} + (-12c_{09} - 12c_{025})a_{02} + (-12c_{023} - 12c_{05})a_{03} + (-4c_{09} - 4c_{025})b_{07} + (-4c_{023} - \\ 4c_{05})b_{08} + 8(3c_{020} + 3c_{00} + c_{04})(a_{016} + b_{028}))a_3 + 2c_3(a_{014} + 3b_{022} + 3a_{03} + b_{08})(a_{013} +$$

$$3b_{021} + 3a_{02} + b_{07}),$$

$$\begin{aligned} C_4 = & ((-2c_{05} - 2c_{023})a_{014} + (-6c_{05} - 6c_{023})b_{022} + (-6c_{05} - 6c_{023})a_{03} + (-2c_{05} - 2c_{023})b_{08} + (-2c_{09} - 2c_{025})a_{013} + (-6c_{09} - 6c_{025})b_{021} + (-6a_{02} - 2b_{07})c_{025} - 6a_{02}c_{09} - 2b_{07}c_{09} + 4(3c_{020} + 3c_{00} + c_{04})(a_{016} + b_{028}))a_{012} + (6c_{00} + 6c_{020} + 2c_{04})a_{018}^2 + ((12c_{020} + 12c_{00} + 4c_{04})b_{029} + (-2c_{09} - 2c_{025})a_{014} + (-6c_{09} - 6c_{025})b_{022} + (-6c_{09} - 6c_{025})a_{03} + (-2c_{09} - 2c_{025})b_{08} - 2(c_{024} + c_{06})(a_{013} + 3b_{021} + 3a_{02} + b_{07}))a_{018} + ((-2c_{05} - 2c_{023})a_{014} + (-6c_{05} - 6c_{023})b_{022} + (-6c_{05} - 6c_{023})a_{03} + (-2c_{05} - 2c_{023})b_{08} + (-2c_{09} - 2c_{025})a_{013} + (-6c_{09} - 6c_{025})b_{021} + (-6a_{02} - 2b_{07})c_{025} - 6a_{02}c_{09} - 2b_{07}c_{09} + 4(3c_{020} + 3c_{00} + c_{04})(a_{016} + b_{028}))b_{027} + (6c_{00} + 6c_{020} + 2c_{04})b_{029}^2 + ((-2c_{09} - 2c_{025})a_{014} + (-6c_{09} - 6c_{025})b_{022} + (-6c_{09} - 6c_{025})a_{03} + (-2c_{09} - 2c_{025})b_{08} - 2(c_{024} + c_{06})(a_{013} + 3b_{021} + 3a_{02} + b_{07}))b_{029} + c_{032}a_{014}^2 + (6c_{032}a_{03} + 2a_{013}c_{033} + 2b_{08}c_{032} + 6c_{033}b_{021} + 6c_{032}b_{022} + (-2a_{016} - 2b_{028})c_{024} + (6a_{02} + 2b_{07})c_{033} - 2c_{06}(a_{016} + b_{028}))a_{014} + 9c_{032}b_{022}^2 + (18c_{032}a_{03} + 6a_{013}c_{033} + 6b_{08}c_{032} + 18c_{033}b_{021} + (-6a_{016} - 6b_{028})c_{024} + (18a_{02} + 6b_{07})c_{033} - 6c_{06}(a_{016} + b_{028}))b_{022} + 9c_{032}a_{03}^2 + (6a_{013}c_{033} + 6b_{08}c_{032} + 18c_{033}b_{021} + (-6a_{016} - 6b_{028})c_{024} + (18a_{02} + 6b_{07})c_{033} - 6c_{06}(a_{016} + b_{028}))a_{03} + c_{032}b_{08}^2 + (2a_{013}c_{033} + 6c_{033}b_{021} + (-2a_{016} - 2b_{028})c_{024} + (6a_{02} + 2b_{07})c_{033} - 2c_{06}(a_{016} + b_{028}))b_{08} + c_{034}(a_{013} + 3b_{021} + 3a_{02} + b_{07})^2, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} C_5 = & ((-4c_{023} - 4c_{05})a_{013} + (-12c_{023} - 12c_{05})b_{021} + (-12c_{023} - 12c_{05})a_{02} + (-4c_{023} - 4c_{05})b_{07} + 8(3c_{020} + 3c_{00} + c_{04})(a_{011} + b_{026}))a_3 + (a_{013} + 3b_{021} + 3a_{02} + b_{07})^2c_3, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} C_6 = & ((12c_{020} + 12c_{00} + 4c_{04})a_{018} + (12c_{020} + 12c_{00} + 4c_{04})b_{029} + (-2c_{06} - 2c_{024})a_{013} + (-2c_{09} - 2c_{025})a_{014} + (-6c_{06} - 6c_{024})b_{021} + (-6c_{09} - 6c_{025})b_{022} + (-6c_{06} - 6c_{024})a_{02} + (-6c_{09} - 6c_{025})a_{03} + (-2c_{06} - 2c_{024})b_{07} - 2b_{08}(c_{09} + c_{025}))a_{016} + ((12c_{020} + 12c_{00} + 4c_{04})b_{028} + (-2c_{09} - 2c_{025})a_{013} + (-2c_{05} - 2c_{023})a_{014} + (-6c_{09} - 6c_{025})b_{021} + (-6c_{05} - 6c_{023})b_{022} + (-6c_{09} - 6c_{025})a_{02} + (-6c_{05} - 6c_{023})a_{03} + (-2c_{09} - 2c_{025})b_{07} - 2(c_{05} + c_{023})b_{08})a_{018} + ((12c_{020} + 12c_{00} + 4c_{04})b_{029} + (-2c_{06} - 2c_{024})a_{013} + (-2c_{09} - 2c_{025})a_{014} + (-6c_{06} - 6c_{024})b_{021} + (-6c_{09} - 6c_{025})b_{022} + (-6c_{06} - 6c_{024})a_{02} + (-6c_{09} - 6c_{025})a_{03} + (-2c_{06} - 2c_{024})b_{07} - 2b_{08}(c_{09} + c_{025}))b_{028} + ((-2c_{09} - 2c_{025})a_{013} + (-2c_{05} - 2c_{023})a_{014} + (-6c_{09} - 6c_{025})b_{021} + (-6c_{05} - 6c_{023})b_{022} + (-6c_{09} - 6c_{025})a_{02} + (-6c_{05} - 6c_{023})a_{03} + (-2c_{09} - 2c_{025})b_{07} - 2(c_{05} + c_{023})b_{08})b_{029} + c_{033}a_{013}^2 + (2c_{032}a_{014} + 6c_{033}b_{021} + 6c_{032}b_{022} + 6c_{033}a_{02} + 6c_{032}a_{03} + 2c_{033}b_{07} + 2b_{08}c_{032} - 2(c_{05} + c_{023})(a_{012} + b_{027}))a_{013} + c_{031}a_{014}^2 + (6c_{032}b_{021} + 6c_{031}b_{022} + 6c_{032}a_{02} + 6c_{031}a_{03} + 2c_{032}b_{07} + 2b_{08}c_{031} - 2(c_{024} + c_{06})(a_{011} + b_{026}))a_{014} + 9c_{033}b_{021}^2 + (18c_{032}b_{022} + 18c_{033}a_{02} + 18c_{032}a_{03} + 6c_{033}b_{07} + 6b_{08}c_{032} - 6(c_{05} + c_{023})(a_{012} + b_{027}))b_{021} + 9c_{031}b_{022}^2 + (18c_{032}a_{02} + 18c_{031}a_{03} + 6c_{032}b_{07} + 6b_{08}c_{031} - 6(c_{024} + c_{06})(a_{011} + b_{026}))b_{022} + 9c_{033}a_{02}^2 + (18c_{032}a_{03} + 6c_{033}b_{07} + 6b_{08}c_{032} - 6(c_{05} + c_{023})(a_{012} + b_{027}))a_{02} + 9c_{031}a_{03}^2 + (6c_{032}b_{07} + 6b_{08}c_{031} - 6(c_{024} + c_{06})(a_{011} + b_{026}))a_{03} + c_{033}b_{07}^2 + (2b_{08}c_{032} - 2(c_{05} + c_{023})(a_{012} + b_{027}))b_{07} + c_{031}b_{08}^2 - 2(c_{024} + c_{06})(a_{011} + b_{026})b_{08} + 4(3c_{020} + 3c_{00} + c_{04})(a_{011} + b_{026})(a_{012} + b_{027}), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 C_7 = & ((-2c_{06} - 2c_{024})a_{013} + (-6c_{06} - 6c_{024})b_{021} + (-6c_{06} - 6c_{024})a_{02} + (-2c_{06} - 2c_{024})b_{07} + \\
 & (-2c_{09} - 2c_{025})a_{014} + (-6c_{09} - 6c_{025})b_{022} + (-6a_{03} - 2b_{08})c_{025} - 6a_{03}c_{09} - 2b_{08}c_{09} + 4(\\
 & a_{018} + b_{029})(3c_{020} + 3c_{00} + c_{04}))a_{011} + (6c_{00} + 6c_{020} + 2c_{04})a_{016}^2 + ((12c_{00} + 12c_{020} + 4c_{04}) \\
 &)b_{028} + (-2c_{09} - 2c_{025})a_{013} + (-6c_{09} - 6c_{025})b_{021} + (-6c_{09} - 6c_{025})a_{02} + (-2c_{09} - 2c_{025}) \\
 & b_{07} - 2(c_{05} + c_{023})(a_{014} + 3b_{022} + 3a_{03} + b_{08})a_{016} + ((-2c_{06} - 2c_{024})a_{013} + (-6c_{06} - \\
 & 6c_{024})b_{021} + (-6c_{06} - 6c_{024})a_{02} + (-2c_{06} - 2c_{024})b_{07} + (-2c_{09} - 2c_{025})a_{014} + (-6c_{09} - \\
 & 6c_{025})b_{022} + (-6a_{03} - 2b_{08})c_{025} - 6a_{03}c_{09} - 2b_{08}c_{09} + 4(a_{018} + b_{029})(3c_{020} + 3c_{00} + c_{04})) \\
 & b_{026} + (6c_{00} + 6c_{020} + 2c_{04})b_{028}^2 + ((-2c_{09} - 2c_{025})a_{013} + (-6c_{09} - 6c_{025})b_{021} + (-6c_{09} - \\
 & 6c_{025})a_{02} + (-2c_{09} - 2c_{025})b_{07} - 2(c_{05} + c_{023})(a_{014} + 3b_{022} + 3a_{03} + b_{08}))b_{028} + c_{032}a_{013}^2 \\
 & + (6c_{032}a_{02} + 2c_{031}a_{014} + 2c_{032}b_{07} + 6c_{032}b_{021} + 6c_{031}b_{022} + (-2a_{018} - 2b_{029})c_{023} + (6a_{03} \\
 & + 2b_{08})c_{031} - 2c_{05}(a_{018} + b_{029}))a_{013} + 9c_{032}b_{021}^2 + (18c_{032}a_{02} + 6c_{031}a_{014} + 6c_{032}b_{07} + \\
 & 18c_{031}b_{022} + (-6a_{018} - 6b_{029})c_{023} + (18a_{03} + 6b_{08})c_{031} - 6c_{05}(a_{018} + b_{029}))b_{021} + 9c_{032}a_{02}^2 \\
 & + (6c_{031}a_{014} + 6c_{032}b_{07} + 18c_{031}b_{022} + (-6a_{018} - 6b_{029})c_{023} + (18a_{03} + 6b_{08})c_{031} - 6c_{05}(\\
 & a_{018} + b_{029}))a_{02} + c_{032}b_{07}^2 + (2c_{031}a_{014} + 6c_{031}b_{022} + (-2a_{018} - 2b_{029})c_{023} + (6a_{03} + 2b_{08}) \\
 & c_{031} - 2c_{05}(a_{018} + b_{029}))b_{07} + c_{030}(a_{014} + 3b_{022} + 3a_{03} + b_{08})^2, \\
 C_8 = & ((-2c_{09} - 2c_{025})a_{013} + (-6c_{09} - 6c_{025})b_{021} + (-2a_{014} - 6b_{022} - 6a_{03} - 2b_{08})c_{023} + (- \\
 & 6c_{09} - 6c_{025})a_{02} + (-2c_{09} - 2c_{025})b_{07} + (-2a_{014} - 6b_{022} - 6a_{03} - 2b_{08})c_{05} + 4(a_{016} + \\
 & b_{028})(3c_{020} + 3c_{00} + c_{04}))a_{011} + ((-2c_{09} - 2c_{025})a_{013} + (-6c_{09} - 6c_{025})b_{021} + (-2a_{014} - \\
 & 6b_{022} - 6a_{03} - 2b_{08})c_{023} + (-6c_{09} - 6c_{025})a_{02} + (-2c_{09} - 2c_{025})b_{07} + (-2a_{014} - 6b_{022} - \\
 & 6a_{03} - 2b_{08})c_{05} + 4(a_{016} + b_{028})(3c_{020} + 3c_{00} + c_{04}))b_{026} + (c_{031}a_{013} + 3c_{031}b_{021} + (- \\
 & 2a_{016} - 2b_{028})c_{023} + (2a_{014} + 6b_{022} + 6a_{03} + 2b_{08})c_{030} + 3c_{031}a_{02} + c_{031}b_{07} - 2c_{05}(a_{016} + \\
 & b_{028}))(a_{013} + 3b_{021} + 3a_{02} + b_{07}), \\
 C_9 = & (6c_{00} + 6c_{020} + 2c_{04})a_{011}^2 + ((12c_{00} + 12c_{020} + 4c_{04})b_{026} - 2(a_{013} + 3b_{021} + 3a_{02} + b_{07}))(\\
 & c_{05} + c_{023})a_{011} + 6c_{00} + 6c_{020} + 2c_{04})b_{026}^2 - 2(a_{013} + 3b_{021} + 3a_{02} + b_{07})(c_{05} + c_{023})b_{026} \\
 & + (a_{013} + 3b_{021} + 3a_{02} + b_{07})^2c_{030}, \\
 C_{10} = & -4a_3((3b_{022} + 3a_{03} + b_{08} + a_{014})c_{024} + (3b_{022} + 3a_{03} + b_{08} + a_{014})c_{06} - 2(a_{012} + b_{027}))(\\
 & 3c_{020} + 3c_{00} + c_{04}), \\
 C_{11} = & (6c_{020} + 6c_{00} + 2c_{04})a_{012}^2 + ((12c_{020} + 12c_{00} + 4c_{04})b_{027} - (6b_{022} + 6a_{03} + 2b_{08} + 2a_{014}))(\\
 & c_{024} + c_{06})a_{012} + (6c_{020} + 6c_{00} + 2c_{04})b_{027}^2 - (6b_{022} + 6a_{03} + 2b_{08} + 2a_{014})(c_{024} + c_{06}) \\
 & b_{027} + c_{034}(3b_{022} + 3a_{03} + b_{08} + a_{014})^2, \\
 E_0 = & 8a_3^2(3d_{020} + 3d_{00} + d_{04}), \\
 E_1 = & ((-4d_{024} - 4d_{06})a_{013} + (-4d_{09} - 4d_{025})a_{014} + (-12d_{024} - 12d_{06})b_{021} + (-12d_{09} - 12d_{025}) \\
 &)b_{022} + (-12d_{024} - 12d_{06})a_{02} + (-12d_{09} - 12d_{025})a_{03} + (-4d_{024} - 4d_{06})b_{07} + (-4d_{09} - \\
 & 4d_{025})b_{08} + 8(3d_{020} + 3d_{00} + d_{04})(a_{018} + b_{029})a_3 + 2d_3(3a_{03} + b_{08} + a_{014} + 3b_{022})(a_{013} + \\
 & 3b_{021} + 3a_{02} + b_{07}), \\
 E_2 = & ((-2d_{09} - 2d_{025})a_{014} + (-6d_{09} - 6d_{025})b_{022} + (-2a_{013} - 6b_{021} - 6a_{02} - 2b_{07})d_{024} + (-
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & 6d_{09} - 6d_{025})a_{03} + (-2d_{09} - 2d_{025})b_{08} + (-2a_{013} - 6b_{021} - 6a_{02} - 2b_{07})d_{06} + 4(3d_{020} + \\
 & 3d_{00} + d_{04})(a_{018} + b_{029})a_{012} + ((-2d_{09} - 2d_{025})a_{014} + (-6d_{09} - 6d_{025})b_{022} + (-2a_{013} - \\
 & 6b_{021} - 6a_{02} - 2b_{07})d_{024} + (-6d_{09} - 6d_{025})a_{03} + (-2d_{09} - 2d_{025})b_{08} + (-2a_{013} - 6b_{021} - \\
 & 6a_{02} - 2b_{07})d_{06} + 4(3d_{020} + 3d_{00} + d_{04})(a_{018} + b_{029})b_{027} + (a_{014} + 3b_{022} + 3a_{03} + b_{08})(\\
 & d_{033}a_{014} + 3d_{033}b_{022} + 2(-a_{018} - b_{029})d_{024} + 2(a_{013} + 3b_{021} + 3a_{02} + b_{07})d_{034} + 3d_{033}a_{03} + \\
 & b_{08}d_{033} - 2d_{06}(a_{018} + b_{029})),
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 E_3 = & ((-4d_{09} - 4d_{025})a_{013} + (-12d_{09} - 12d_{025})b_{021} + (-12d_{09} - 12d_{025})a_{02} + (-4d_{09} - 4d_{025}) \\
 & b_{07} + (-4a_{014} - 12b_{022} - 12a_{03} - 4b_{08})d_{023} + (-4a_{014} - 12b_{022} - 12a_{03} - 4b_{08})d_{05} + 8(\\
 & a_{016} + b_{028})(3d_{020} + 3d_{00} + d_{04})a_3 + d_3(a_{013} + 3b_{021} + 3a_{02} + b_{07})^2,
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 E_4 = & ((-2d_{05} - 2d_{023})a_{014} + (-6d_{05} - 6d_{023})b_{022} + (-6d_{05} - 6d_{023})a_{03} + (-2d_{05} - 2d_{023})b_{08} + \\
 & (-2d_{09} - 2d_{025})a_{013} + (-6d_{09} - 6d_{025})b_{021} + (-6a_{02} - 2b_{07})d_{025} - 6a_{02}d_{09} - 2b_{07}d_{09} + 4(\\
 & a_{016} + b_{028})(3d_{020} + 3d_{00} + d_{04})a_{012} + (6d_{00} + 6d_{020} + 2d_{04})a_{018}^2 + ((12d_{00} + 12d_{020} + \\
 & 4d_{04})b_{029} + (-2d_{09} - 2d_{025})a_{014} + (-6d_{09} - 6d_{025})b_{022} + (-6d_{09} - 6d_{025})a_{03} + (-2d_{09} - \\
 & 2d_{025})b_{08} - 2(d_{06} + d_{024})(a_{013} + 3b_{021} + 3a_{02} + b_{07}))a_{018} + ((-2d_{05} - 2d_{023})a_{014} + (-6d_{05} \\
 & - 6d_{023})b_{022} + (-6d_{05} - 6d_{023})a_{03} + (-2d_{05} - 2d_{023})b_{08} + (-2d_{09} - 2d_{025})a_{013} + (-6d_{09} \\
 & - 6d_{025})b_{021} + (-6a_{02} - 2b_{07})d_{025} - 6a_{02}d_{09} - 2b_{07}d_{09} + 4(a_{016} + b_{028})(3d_{020} + 3d_{00} + d_{04} \\
 &))b_{027} + (6d_{00} + 6d_{020} + 2d_{04})b_{029}^2 + ((-2d_{09} - 2d_{025})a_{014} + (-6d_{09} - 6d_{025})b_{022} + (-6d_{09} \\
 & - 6d_{025})a_{03} + (-2d_{09} - 2d_{025})b_{08} - 2(d_{06} + d_{024})(a_{013} + 3b_{021} + 3a_{02} + b_{07}))b_{029} + d_{032} \\
 & a_{014}^2 + (6d_{032}a_{03} + 2a_{013}d_{033} + 2b_{08}d_{032} + 6d_{033}b_{021} + 6d_{032}b_{022} + (-2a_{016} - 2b_{028})d_{024} + (\\
 & 6a_{02} + 2b_{07})d_{033} - 2d_{06}(a_{016} + b_{028}))a_{014} + 9d_{032}b_{022}^2 + (18d_{032}a_{03} + 6a_{013}d_{033} + 6b_{08}d_{032} \\
 & + 18d_{033}b_{021} + (-6a_{016} - 6b_{028})d_{024} + (18a_{02} + 6b_{07})d_{033} - 6d_{06}(a_{016} + b_{028}))b_{022} + 9d_{032} \\
 & a_{03}^2 + (6a_{013}d_{033} + 6b_{08}d_{032} + 18d_{033}b_{021} + (-6a_{016} - 6b_{028})d_{024} + (18a_{02} + 6b_{07})d_{033} - \\
 & 6d_{06}(a_{016} + b_{028}))a_{03} + d_{032}b_{08}^2 + (2a_{013}d_{033} + 6d_{033}b_{021} + (-2a_{016} - 2b_{028})d_{024} + (6a_{02} + \\
 & 2b_{07})d_{033} - 2d_{06}(a_{016} + b_{028}))b_{08} + d_{034}(a_{013} + 3b_{021} + 3a_{02} + b_{07})^2,
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 E_5 = & 4a_3((6d_{00} + 6d_{020} + 2d_{04})(a_{011} + b_{026}) - (a_{013} + 3b_{021} + 3a_{02} + b_{07})d_{023} - (a_{013} + 3b_{021} + \\
 & 3a_{02} + b_{07})d_{05}),
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 E_6 = & ((12d_{00} + 12d_{020} + 4d_{04})a_{018} + (12d_{00} + 12d_{020} + 4d_{04})b_{029} + (-2d_{06} - 2d_{024})a_{013} + (- \\
 & 2d_{09} - 2d_{025})a_{014} + (-6d_{06} - 6d_{024})b_{021} + (-6d_{09} - 6d_{025})b_{022} + (-6d_{06} - 6d_{024})a_{02} + (- \\
 & 6d_{09} - 6d_{025})a_{03} + (-2d_{06} - 2d_{024})b_{07} - 2b_{08}(d_{09} + d_{025}))a_{016} + ((12d_{00} + 12d_{020} + 4d_{04}) \\
 & b_{028} + (-2d_{09} - 2d_{025})a_{013} + (-2d_{05} - 2d_{023})a_{014} + (-6d_{09} - 6d_{025})b_{021} + (-6d_{05} - 6d_{023} \\
 &)b_{022} + (-6d_{09} - 6d_{025})a_{02} + (-6d_{05} - 6d_{023})a_{03} + (-2d_{09} - 2d_{025})b_{07} - 2b_{08}(d_{023} + d_{05})) \\
 & a_{018} + ((12d_{00} + 12d_{020} + 4d_{04})b_{029} + (-2d_{06} - 2d_{024})a_{013} + (-2d_{09} - 2d_{025})a_{014} + (- \\
 & 6d_{06} - 6d_{024})b_{021} + (-6d_{09} - 6d_{025})b_{022} + (-6d_{06} - 6d_{024})a_{02} + (-6d_{09} - 6d_{025})a_{03} + (- \\
 & 2d_{06} - 2d_{024})b_{07} - 2b_{08}(d_{09} + d_{025}))b_{028} + ((-2d_{09} - 2d_{025})a_{013} + (-2d_{05} - 2d_{023})a_{014} + (\\
 & -6d_{09} - 6d_{025})b_{021} + (-6d_{05} - 6d_{023})b_{022} + (-6d_{09} - 6d_{025})a_{02} + (-6d_{05} - 6d_{023})a_{03} + (\\
 & -2d_{09} - 2d_{025})b_{07} - 2b_{08}(d_{023} + d_{05}))b_{029} + d_{033}a_{013}^2 + (2d_{032}a_{014} + 6d_{033}b_{021} + 6d_{032}b_{022}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & +6d_{033}a_{02} + 6d_{032}a_{03} + 2d_{033}b_{07} + 2b_{08}d_{032} - 2(d_{023} + d_{05})(a_{012} + b_{027})a_{013} + d_{031}a_{014}^2 + \\
 & (6d_{032}b_{021} + 6d_{031}b_{022} + 6d_{032}a_{02} + 6d_{031}a_{03} + 2d_{032}b_{07} + 2b_{08}d_{031} - 2(d_{06} + d_{024})(a_{011} + \\
 & b_{026}))a_{014} + 9d_{033}b_{021}^2 + (18d_{032}b_{022} + 18d_{033}a_{02} + 18d_{032}a_{03} + 6d_{033}b_{07} + 6b_{08}d_{032} - 6(\\
 & d_{023} + d_{05})(a_{012} + b_{027}))b_{021} + 9d_{031}b_{022}^2 + (18d_{032}a_{02} + 18d_{031}a_{03} + 6d_{032}b_{07} + 6b_{08}d_{031} - \\
 & 6(d_{06} + d_{024})(a_{011} + b_{026}))b_{022} + 9d_{033}a_{02}^2 + (18d_{032}a_{03} + 6d_{033}b_{07} + 6b_{08}d_{032} - 6(d_{023} + \\
 & d_{05})(a_{012} + b_{027}))a_{02} + 9d_{031}a_{03}^2 + (6d_{032}b_{07} + 6b_{08}d_{031} - 6(d_{06} + d_{024})(a_{011} + b_{026}))a_{03} + \\
 & d_{033}b_{07}^2 + (2b_{08}d_{032} - 2(d_{023} + d_{05})(a_{012} + b_{027}))b_{07} + d_{031}b_{08}^2 - 2(d_{06} + d_{024})(a_{011} + b_{026}) \\
 & b_{08} + 4(a_{012} + b_{027})(a_{011} + b_{026})(3d_{020} + 3d_{00} + d_{04}), \\
 E_7 = & ((-2d_{06} - 2d_{024})a_{013} + (-6d_{06} - 6d_{024})b_{021} + (-6d_{06} - 6d_{024})a_{02} + (-2d_{06} - 2d_{024})b_{07} \\
 & + (-2d_{09} - 2d_{025})a_{014} + (-6d_{09} - 6d_{025})b_{022} + (-6a_{03} - 2b_{08})d_{025} - 6d_{09}a_{03} - 2d_{09}b_{08} + \\
 & 4(3d_{020} + 3d_{00} + d_{04})(a_{018} + b_{029}))a_{011} + (6d_{00} + 6d_{020} + 2d_{04})a_{016}^2 + ((12d_{00} + 12d_{020} + \\
 & 4d_{04})b_{028} + (-2d_{09} - 2d_{025})a_{013} + (-6d_{09} - 6d_{025})b_{021} + (-6d_{09} - 6d_{025})a_{02} + (-2d_{09} - \\
 & 2d_{025})b_{07} - 2(d_{023} + d_{05})(a_{014} + 3b_{022} + 3a_{03} + b_{08}))a_{016} + ((-2d_{06} - 2d_{024})a_{013} + (- \\
 & 6d_{06} - 6d_{024})b_{021} + (-6d_{06} - 6d_{024})a_{02} + (-2d_{06} - 2d_{024})b_{07} + (-2d_{09} - 2d_{025})a_{014} + (- \\
 & 6d_{09} - 6d_{025})b_{022} + (-6a_{03} - 2b_{08})d_{025} - 6d_{09}a_{03} - 2d_{09}b_{08} + 4(3d_{020} + 3d_{00} + d_{04})(a_{018} \\
 & + b_{029}))b_{026} + (6d_{00} + 6d_{020} + 2d_{04})b_{028}^2 + ((-2d_{09} - 2d_{025})a_{013} + (-6d_{09} - 6d_{025})b_{021} + (\\
 & -6d_{09} - 6d_{025})a_{02} + (-2d_{09} - 2d_{025})b_{07} - 2(d_{023} + d_{05})(a_{014} + 3b_{022} + 3a_{03} + b_{08}))b_{028} + \\
 & d_{032}a_{013}^2 + (6d_{032}a_{02} + 2d_{031}a_{014} + 2d_{032}b_{07} + 6d_{032}b_{021} + 6d_{031}b_{022} + (-2a_{018} - 2b_{029}) \\
 & d_{023} + (6a_{03} + 2b_{08})d_{031} - 2d_{05}(a_{018} + b_{029}))a_{013} + 9d_{032}b_{021}^2 + (18d_{032}a_{02} + 6d_{031}a_{014} + \\
 & 6d_{032}b_{07} + 18d_{031}b_{022} + (-6a_{018} - 6b_{029})d_{023} + (18a_{03} + 6b_{08})d_{031} - 6d_{05}(a_{018} + b_{029})) \\
 & b_{021} + 9d_{032}a_{02}^2 + (6d_{031}a_{014} + 6d_{032}b_{07} + 18d_{031}b_{022} + (-6a_{018} - 6b_{029})d_{023} + (18a_{03} + \\
 & 6b_{08})d_{031} - 6d_{05}(a_{018} + b_{029}))a_{02} + d_{032}b_{07}^2 + (2d_{031}a_{014} + 6d_{031}b_{022} + (-2a_{018} - 2b_{029}) \\
 & d_{023} + (6a_{03} + 2b_{08})d_{031} - 2d_{05}(a_{018} + b_{029}))b_{07} + d_{030}(a_{014} + 3b_{022} + 3a_{03} + b_{08})^2, \\
 E_8 = & ((-2d_{09} - 2d_{025})a_{013} + (-6d_{09} - 6d_{025})b_{021} + (-2a_{014} - 6b_{022} - 6a_{03} - 2b_{08})d_{023} + (- \\
 & 6d_{09} - 6d_{025})a_{02} + (-2d_{09} - 2d_{025})b_{07} + (-2a_{014} - 6b_{022} - 6a_{03} - 2b_{08})d_{05} + 4(a_{016} + \\
 & b_{028})(3d_{020} + 3d_{00} + d_{04}))a_{011} + ((-2d_{09} - 2d_{025})a_{013} + (-6d_{09} - 6d_{025})b_{021} + (-2a_{014} - \\
 & 6b_{022} - 6a_{03} - 2b_{08})d_{023} + (-6d_{09} - 6d_{025})a_{02} + (-2d_{09} - 2d_{025})b_{07} + (-2a_{014} - 6b_{022} - \\
 & 6a_{03} - 2b_{08})d_{05} + 4(a_{016} + b_{028})(3d_{020} + 3d_{00} + d_{04}))b_{026} + (a_{013} + 3b_{021} + 3a_{02} + b_{07})(\\
 & d_{031}a_{013} + 3d_{031}b_{021} + (-2a_{016} - 2b_{028})d_{023} + (2a_{014} + 6b_{022} + 6a_{03} + 2b_{08})d_{030} + 3d_{031} \\
 & a_{02} + d_{031}b_{07} - 2d_{05}(a_{016} + b_{028})), \\
 E_9 = & (6d_{00} + 6d_{020} + 2d_{04})a_{011}^2 + ((12d_{00} + 12d_{020} + 4d_{04})b_{026} - 2(a_{013} + 3b_{021} + 3a_{02} + b_{07})(\\
 & d_{023} + d_{05}))a_{011} + (6d_{00} + 6d_{020} + 2d_{04})b_{026}^2 - 2(a_{013} + 3b_{021} + 3a_{02} + b_{07})(d_{023} + d_{05}) \\
 & b_{026} + (a_{013} + 3b_{021} + 3a_{02} + b_{07})^2d_{030}, \\
 E_{10} = & ((-4d_{024} - 4d_{06})a_{014} + (-12d_{024} - 12d_{06})b_{022} + (-12d_{024} - 12d_{06})a_{03} + (-4d_{024} - 4d_{06}) \\
 & b_{08} + 8(3d_{020} + 3d_{00} + d_{04})(a_{012} + b_{027}))a_3 + (a_{014} + 3b_{022} + 3a_{03} + b_{08})^2d_3, \\
 E_{11} = & (6d_{00} + 6d_{020} + 2d_{04})a_{012}^2 + ((12d_{00} + 12d_{020} + 4d_{04})b_{027} - 2(a_{014} + 3b_{022} + 3a_{03} + b_{08})(
 \end{aligned}$$

$$d_{06} + d_{024}))a_{012} + (6d_{00} + 6d_{020} + 2d_{04})b_{027}^2 - 2(a_{014} + 3b_{022} + 3a_{03} + b_{08})(d_{06} + d_{024})b_{027} + (a_{014} + 3b_{022} + 3a_{03} + b_{08})^2d_{034}.$$

Par conséquent, il est facile de vérifier que le système $(h_{32}(\beta, \xi), h_{33}(\beta, \xi)) = (0, 0)$ a au plus 36 solutions réelles selon le théorème de Bézout. Ainsi, les coefficients du système (4.7) peuvent être choisis de telle manière que ce système ait 36 solutions réelles différentes de zéro pour $\alpha > 0$.

Soit $(\bar{\alpha}, \bar{\beta}, \bar{\xi})$ une solution du système (4.7). Pour avoir un cycle limite selon la théorie de moyennisation dans la Section 4.2, nous devons avoir

$$D(\bar{\alpha}, \bar{\beta}, \bar{\xi}) = \det \begin{pmatrix} \frac{\partial g_{31}}{\partial \alpha} & \frac{\partial g_{31}}{\partial \beta} & \frac{\partial g_{31}}{\partial \xi} \\ \frac{\partial g_{32}}{\partial \alpha} & \frac{\partial g_{32}}{\partial \beta} & \frac{\partial g_{32}}{\partial \xi} \\ \frac{\partial g_{33}}{\partial \alpha} & \frac{\partial g_{33}}{\partial \beta} & \frac{\partial g_{33}}{\partial \xi} \end{pmatrix} \Big|_{(\alpha, \beta, \xi) = (\bar{\alpha}, \bar{\beta}, \bar{\xi})} \neq 0. \quad (4.8)$$

En résumé, nous déduisons que le système (4.1) a au plus 36 cycles limites dans une bifurcation de zéro-Hopf à l'origine, en utilisant la théorie du moyennisation d'ordre trois. Cela complète la preuve du Théorème 4.1.1.

Preuve 11 (Preuve du Corollaire 3) En effectuant le changement de variables $(x, y, z, w) = (\epsilon X, \epsilon Y, \epsilon Z, \epsilon W)$, le système (4.2) devient

$$\begin{aligned} \dot{X} &= \left(-\frac{5}{3}X^3W + YZX^2 - XW^3 + YXW^2 - ZXW^2 + Y^2XW - 3Z^2XW + Y^2ZX + Y \right. \\ &\quad \left. Z^2X - Z^3X - X + W^4 + Y^4 - Y \right) \epsilon^3 - Y\epsilon^2 - \epsilon Y - Y, \\ \dot{Y} &= (2W^4 + W^3Y - W^2YZ + WX^2Y + WY^3 + WYZ^2 + 3WZ^3 + X^3Y + X^2YZ + 2Y^4 - \\ &\quad YZ^3 + X - Y)\epsilon^3 + X\epsilon^2 + \epsilon X + X, \\ \dot{Z} &= \left(Y^2Z^2 + W^2Y^2 + X^2Y^2 + X^2Z^2 - 4Z^3W + 4W^3Z - 3X^2W^2 - 2W^2Z^2 + 2W^4 - \right. \\ &\quad \left. \frac{23}{4}Z^4 + Y^4 - X^4 - \frac{41}{4}Z - WY^2Z - X^2ZW \right) \epsilon^3, \\ \dot{W} &= \left(WY^2Z + X^2ZW + Y^2Z^2 + W^2Y^2 + \frac{1331}{28}W^2Z^2 + X^2Y^2 - \frac{60}{7}W^3Z - \frac{1377}{56}X^2Z^2 - \right. \\ &\quad \left. \frac{213}{14}X^2W^2 - \frac{347}{28}Z^3W - \frac{206}{7}W + \frac{209}{14}W^4 + \frac{705}{14}Z^4 + Y^4 + X^4 \right) \epsilon^3. \end{aligned}$$

Nous écrivons ce système dans les coordonnées cylindriques $(X, Y, Z, W) = (\alpha \cos(\theta), \alpha \sin(\theta), \beta, \xi)$ et nous obtenons

$$\begin{aligned} \dot{\alpha} &= \frac{1}{3}(2\alpha^3(3\alpha \sin(\theta) - 3\beta - 4\xi) \cos(\theta)^4 + 3\alpha^3(\beta \sin(\theta) - \alpha) \cos(\theta)^3 + 3(\alpha(\beta^2 - 4\alpha^2 + \xi^2) \\ &\quad \sin(\theta) - 4\xi\beta^2 + 2\alpha^2\beta - 2\xi^3)\alpha \cos(\theta)^2 + 3(\alpha^4 + \xi^4) \cos(\theta) + 3(3\beta^3\xi + 2\alpha^4 + 2\xi^4) \sin(\theta) + \\ &\quad 3\alpha(-\beta^3 + \beta^2\xi - \beta\xi^2 + \alpha^2\xi + \xi^3 - 1))\epsilon^3, \\ \dot{\theta} &= \frac{1}{3\alpha}((6 \cos(\theta)^5\alpha^4 + 3 \cos(\theta)^4\beta\alpha^3 + ((8\xi + 6\beta)\alpha \sin(\theta) + 3\xi^2 + 3\beta^2 - 12\alpha^2)\alpha^2 \cos(\theta)^3 - \\ &\quad 3\alpha^3(-2\alpha \sin(\theta) + \beta) \cos(\theta)^2 + (\alpha(12\beta^2\xi - 3\beta\alpha^2 + 6\xi^3) \sin(\theta) + 6\alpha^4 - (3\beta^2 + 3\xi^2)\alpha^2 + \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & 6\xi^4 + 9\xi\beta^3) \cos(\theta) - 3(\alpha^4 + \xi^4) \sin(\theta) + 3\alpha\epsilon^3 + 3\alpha\epsilon^2 + 3\alpha\epsilon + 3\alpha), \\
 \dot{\beta} &= \frac{\epsilon^3}{4}(-4\alpha^4 \cos(\theta)^4 - 4\alpha^4 \cos(\theta)^2 - 16\alpha^2 \cos(\theta)^2 \xi^2 - 23\beta^4 - 16\xi\beta^3 + 4\alpha^2 \beta^2 - 8\xi^2 \beta^2 - 4\alpha^2 \beta \\
 & \quad \xi + 16\xi^3 \beta + 4\alpha^4 + 4\xi^2 \alpha^2 + 8\xi^4 - 41\beta), \\
 \dot{\xi} &= \frac{\epsilon^3}{56}(56\alpha^4 \cos(\theta)^4 + (-1433\beta^2 \alpha^2 - 56\alpha^4 - 908\alpha^2 \xi^2) \cos(\theta)^2 + 56\alpha^4 + 56(\beta^2 + \beta\xi + \xi^2) \alpha^2 \\
 & \quad + 2820\beta^4 - 694\xi\beta^3 + 2662\xi^2 \beta^2 - 480\xi^3 \beta + 836\xi^4 - 1648\xi).
 \end{aligned}$$

Nous changeons la variable indépendante de t à θ , et en notant la dérivée par rapport à θ par un point, alors nous obtenons le système

$$\begin{aligned}
 \dot{\alpha} &= \frac{\epsilon^3}{3}(2\alpha^3(3\alpha \sin(\theta) - 3\beta - 4\xi) \cos(\theta)^4 + (3\alpha^3 \beta \sin(\theta) - 3\alpha^4) \cos(\theta)^3 - 3(-\alpha(\beta^2 - 4\alpha^2 + \xi^2) \\
 & \quad) \sin(\theta) + 2\xi^3 + 4\xi\beta^2 - 2\alpha^2 \beta) \alpha \cos(\theta)^2 + (3\alpha^4 + 3\xi^4) \cos(\theta) + (9\beta^3 \xi + 6\alpha^4 + 6\xi^4) \sin(\theta) \\
 & \quad + 3\alpha(-\beta^3 + \beta^2 \xi - \beta\xi^2 + \alpha^2 \xi + \xi^3 - 1)) + O(\epsilon^4), \\
 \dot{\beta} &= \frac{\epsilon^3}{4}(-4\alpha^4 \cos(\theta)^4 + (-4\alpha^4 - 16\alpha^2 \xi^2) \cos(\theta)^2 - 23\beta^4 - 16\xi\beta^3 + (4\alpha^2 - 8\xi^2) \beta^2 + (-4\alpha^2 \xi + \\
 & \quad 16\xi^3 - 41) \beta + 8\xi^4 + 4\xi^2 \alpha^2 + 4\alpha^4) + O(\epsilon^4), \\
 \dot{\xi} &= \frac{\epsilon^3}{56}(56\alpha^4 \cos(\theta)^4 - 1433\alpha^2 \cos(\theta)^2 \beta^2 - 56 \cos(\theta)^2 \alpha^4 - 908\alpha^2 \cos(\theta)^2 \xi^2 + 2820\beta^4 - 694\xi\beta^3 \\
 & \quad + 56\alpha^2 \beta^2 + 2662\xi^2 \beta^2 + 56\xi\alpha^2 \beta - 480\xi^3 \beta + 56\alpha^4 + 56\xi^2 \alpha^2 + 836\xi^4 - 1648\xi) + O(\epsilon^4).
 \end{aligned}$$

Maintenant, nous appliquons la théorie de moyennisation d'ordre trois et nous obtenons que la troisième fonction moyennée $g_3(\alpha, \beta, \xi) = (g_{31}(\alpha, \beta, \xi), g_{32}(\alpha, \beta, \xi), g_{33}(\alpha, \beta, \xi))$ est

$$\left\{ \begin{array}{l}
 g_{31}(\alpha, \beta, \xi) = \left(\left(\frac{\alpha^2}{4} - \xi^2 \right) \beta - \beta^3 - \xi\beta^2 - 1 \right) \alpha, \\
 g_{32}(\alpha, \beta, \xi) = \alpha^2 \beta^2 - \xi^2 \alpha^2 - 4\xi\beta^3 - 2\xi^2 \beta^2 + 4\xi^3 \beta - \xi\alpha^2 \beta + \frac{1}{8} \alpha^4 - \frac{41}{4} \beta - \frac{23}{4} \beta^4 + 2\xi^4, \\
 g_{33}(\alpha, \beta, \xi) = \frac{209\xi^4}{14} - \frac{60\xi^3 \beta}{7} + \frac{(5324\beta^2 - 796\alpha^2)\xi^2}{112} + \frac{(-1388\beta^3 + 112\beta\alpha^2 - 3296)\xi}{112} + \\
 \quad \frac{705}{14} \beta^4 - \frac{1321\alpha^2 \beta^2}{112} + \frac{7\alpha^4}{8}.
 \end{array} \right. \quad (4.9)$$

Pour rechercher les cycles limites du système (4.2) en utilisant la théorie de moyennisation, nous devons calculer les racines réelles isolées du système moyenné (4.9) avec $\alpha > 0$.

Nous isolons α^2 de l'équation $g_{31}(\alpha, \beta, \xi) = 0$, puis nous le substituons dans $g_{3i}(\alpha, \beta, \xi) = 0$ pour $i = 2, 3$. Enfin, nous obtenons deux fonctions $(h_{32}, h_{33}) = (h_{32}(\beta, \xi), h_{33}(\beta, \xi))$ données par

$$\begin{aligned}
 h_{32} &= \frac{\beta^6 - 9\beta^3 + 8}{4\beta^2}, \\
 h_{33} &= \frac{481\beta^6 - 772\beta^5 \xi + 502\beta^4 \xi^2 - 140\beta^3 \xi^3 + 14\beta^2 \xi^4 - 537\beta^3 + 72\beta^2 \xi - 12\beta \xi^2 + 392}{28\beta^2},
 \end{aligned}$$

où $\alpha^2 = \frac{4(\beta^3 + \beta^2 \xi + \beta \xi^2 + 1)}{\beta}$.

En résolvant le système $(h_{32}(\beta, \xi), h_{33}(\beta, \xi)) = (0, 0)$ pour (α, β, ξ) avec $\beta \neq 0$, nous obtenons

les huit solutions réelles suivantes

$$\{(4, 1, 1), (4\sqrt{2}, 1, 2), (2\sqrt{14}, 1, 3), (2\sqrt{22}, 1, 4), (\sqrt{78}, 2, 3), (\sqrt{114}, 2, 4), (\sqrt{158}, 2, 5), (13\sqrt{2}, 2, 8)\}.$$

Nous pouvons facilement vérifier que ces solutions sont des racines du système moyenné (4.9).

Étant donné que les déterminants (4.8) pour ces huit solutions sont respectivement $\{126, -84, 147, -693, (-4095/2), 1197, (-4977/2), 53235\}$ et donc non nuls, le système (4.2) présente huit cycles limites bifurquant de l'origine, conformément à la théorie de moyennisation du troisième ordre.

Cela complète la preuve du corollaire 1.

4.4 Conclusion

Tout d'abord, nous avons identifié le système sur lequel nous travaillons, à savoir un système différentiel polynomial dans \mathbb{R}^4 avec des non-linéarités homogènes quartiques. Nous avons prouvé que ce système peut exhiber au maximum 36 cycles limites bifurquant d'une singularité avec des valeurs propres de la forme $\pm\omega i$, 0, et 0, en utilisant la théorie de la moyennisation du troisième ordre et le théorème de Bézout. Enfin, nous avons appliqué un exemple sur ce cas et obtenu un système contenant huit solutions périodiques bifurquant du point d'équilibre Zero-Hopf localisé à l'origine des coordonnées lorsque $\epsilon = 0$, comme démontré dans la **preuve 11** (preuve du **corollaire 1**).

Conclusion et Perspectives

Dans cette thèse, à l'aide de la théorie de moyennisation du premier ordre, nous avons prouvé qu'un système différentiel de Kolmogorov de degré 3 dans \mathbb{R}^3 peut avoir au plus deux cycles limites qui peuvent bifurquer de ces équilibres zéro-Hopf.

Nous avons aussi prouvé qu'un système différentiel polynomial dans \mathbb{R}^4 , avec des non-linéarités homogènes quartiques, peut exhiber au maximum 36 cycles limites bifurquant d'une singularité avec des valeurs propres de la forme : $\pm\omega i$, 0 et 0, en utilisant la théorie de moyennisation du troisième ordre et le théorème de Bézout.

Comme perspectives nous continuerons nos recherches sur l'existence de solutions périodiques pour d'autres types de systèmes différentiels modélisant des phénomènes en biologie, en physique, en mécanique, etc.

Nous comptons également faire des recherches sur les cycles limites pour les systèmes différentiels en rapport avec la deuxième partie du seizième problème de Hilbert, en utilisant la théorie de moyennisation d'ordre supérieur.

Bibliographie

- [1] V. I. Arnold. *Geometrical methods in the theory of ordinary differential equations*, volume 250. Springer Science & Business Media, 2012.
- [2] I. Baldomá and T. M. Seara. Breakdown of heteroclinic orbits for some analytic unfoldings of the Hopf–zero singularity. *J Nonlinear Sci.* 2006 ;16 :543–582.
- [3] I. Baldomá and T. M. Seara. The inner equation for generic analytic unfoldings of the Hopf–zero singularity. *Discrete Contin Dyn Syst Ser.* 2008 ;10 :323–347.
- [4] E. Bendib, S. Badi, and A. Makhlouf. On the 3-dimensional hopf bifurcation via averaging theory of third order. *Turkish Journal of Mathematics*, 41(4) :1053–1071, 2017.
- [5] I. S. Berezin and N. P. Zhidkov. *Computing Methods, Volume II*. Pergamon Press, Oxford, 1964.
- [6] N. N. Bogolyubov. On some statistical methods in mathematical physics. *Izdat. Akad. Nauk Ukr. SSR, Kiev*, 1945.
- [7] N. N. Bogoliubov and N. Krylov. The application of methods of nonlinear mechanics in the theory of stationary oscillations. *Publ 8 of the Ukrainian Acad Sci Kiev*. 1934.
- [8] N. Bogoliubov and Y. A. Mitropolsky. *Asymptotic methods in the theory of non-linear oscillations*. Hindustan, 1961.
- [9] C. Bouaziz, J. Llibre, D. Djedid, and A. Makhlouf. Periodic orbits in the zero-hopf bifurcations of 3-dimensional kolmogorov systems of degree 3. *Applied Mathematics E-Notes*, 24 :237–273, 2024.
- [10] C. Bouaziz, J. Llibre, and A. Makhlouf. Limit cycle bifurcation from a zero-hopf equilibrium for a class of 3-dimensional kolmogorov systems. *Partial Differential Equations in Applied Mathematics*, 11 :100810, 2024.
- [11] C. Bouaziz, A. Makhlouf, and A. E. Tabet. Zero-Hopf bifurcation in a four-dimensional quartic polynomial differential system via averaging theory of third order. *Computational Methods for Differential Equations*, doi :10.22034/cmde.2024.61831.2690, 2024.
- [12] F. Brauer and C. Castillo-Chavez. *Mathematical Models in Population Biology and Epidemiology*. *Spring-Verl.* 2000.
- [13] H. W. Broer and G. Vegter. Subordinate Silnikov bifurcations near some singularities of vector fields having low codimension. *ergod Theory Dyn Syst.* 1984;4 :509–525.
- [14] A. Buică and J. Llibre. Averaging methods for finding periodic orbits via brouwer degree. *Bulletin des sciences mathematiques*, 128(1) :7–22, 2004.
- [15] Y. R. Carvalho, L. P. C. Da Cruz and L. F. S. Gouveia. New lower bound for the Hilbert number in low degree Kolmogorov systems. *Chaos Solitons Fractals*. 2023 ;175(113937) :9.

- [16] A. R. Champneys and V. Kirk. The entwined wiggling of homoclinic curves emerging from saddle-node/Hopf instabilities. *phys D*.2004 ;195 :77–105.
- [17] D. Djedid, E. O. Bendib, and A. Makhlof. Four-dimensional zero-Hopf bifurcation of quadratic polynomial differential system, via averaging theory of third order. *J. Dyn. Control Syst.*, 28(4) :901–916, 2022.
- [18] D. Djedid, J. Llibre and A. Makhlof. Periodic orbits bifurcating from a Hopf equilibrium of 2-dimensional polynomial Kolmogorov systems of arbitrary degree. *Chaos Solitons Fractals*. 2021 ;142(110489) :7.
- [19] P. Fatou. Sur le mouvement d’un système soumis à des forces à courte période. *Bulletin de la Société Mathématique de France*, 56 :98–139, 1928.
- [20] A. Feddaoui, J. Llibre, and A. Makhlof. 4-dimensional zero-hopf bifurcation for polynomial differentials systems with cubic homogeneous nonlinearities via averaging theory. *International Journal of Dynamical Systems and Differential Equations*, 10(4) :321–328, 2020.
- [21] H. I. Freedman. Deterministic Mathematical Models in Population Ecology. *Marcel Dekker*. 1980.
- [22] M. Gazor and F. Mokhtari. Normal Forms of Hopf–Zero singularity. *Nonlinearity*. 2015 ;28 :311—330.
- [23] J. M. Ginoux and J. Llibre. Zero-Hopf bifurcation in the Chua’s circuit. *J Math Phys*. 2023 ;64(7) :6.
- [24] J. Guckenheimer. On a codimension two bifurcation. *Lect Notes in Math*. 1980 ;898 :99–142.
- [25] J. Guckenheimer and P. Holmes. Nonlinear oscillations, dynamical systems, and bifurcations of vector fields. Appl Mathematical Sciences. *Springer–Verl ,N Y*. 1990 ;42.
- [26] M. Han. Existence of periodic orbits and invariant tori in codimension two bifurcations of three dimensional systems. *J Sys Sci & Math Scis*. 1998 ;18 :403–409.
- [27] A. Hofman. An algorithm for solving a control problem for Kolmogorov systems. *Stud Univ Babeş-Bolyai Math*. 2023 ;68(2) :331–340.
- [28] F. Hoppensteadt. Predator-Prey model, Scholarpedia. *J Sys Sci and Math Scis*. 2000 ;18.
- [29] Z. Hou. On global dynamics of type-K competitive Kolmogorov differential systems. *Nonlinearity*. 2023 ;36(7) :3796–3834.
- [30] A. Kolmogorov. Sulla teoria di volterra della lotta per lesistenza. *G dell Istituto Italiano degli Attuari*. 19 ;36 :17–80.
- [31] N. Krylov and N. N. Bogoliubov. The application of methods of nonlinear mechanics to the theory of stationary oscillations, pub. 8 ukrainian acad. *Sci., Kiev*, 1934.
- [32] Y. Kuznetsov. Elements of applied bifurcation theory, Applied Mathematical Sciences. *Springer-Verl, N Y*. 2004 ;112.
- [33] G. Layek et al. *An introduction to dynamical systems and chaos*, volume 449. Springer, 2015.
- [34] J. Llibre, A. Makhlof, and S. Badi. 3-dimensional hopf bifurcation via averaging theory of second order. *Discrete and Continuous Dynamical Systems-Series A (DCDS-A)*, 25(4) :1287, 2009.
- [35] J. Llibre, R. Moeckel and C. Simó. Central configurations, periodic orbits and Hamiltonian systems. *Advances Courses in Math, CRM Barc, Birhauser*. 2015.
- [36] J. Llibre and D. D. Novaes. Improving the averaging theory for computing periodic solutions of the differential equations. *Z Angew Math Phys*. 2015 ;66(4) :1401–1412.

- [37] J. Llibre, D. D. Novaes, and M. A. Teixeira. Higher order averaging theory for finding periodic solutions via brouwer degree. *Nonlinearity*, 27(3) :563, 2014.
- [38] J. Llibre, D. Xiao. Limit cycles bifurcating from a non-isolated zero-Hopf equilibrium of three-dimensional differential systems. *Proc Amer Math Soc.* 2014;142 :2047–2062.
- [39] J. Llibre and X. Zhang. Hopf bifurcation in higher dimensional differential systems via the averaging method. *Pacific journal of mathematics*, 240(2) :321–341, 2009.
- [40] E. N. Lorenz. Deterministic nonperiodic flow. *Journal of atmospheric sciences*, 20(2) :130–141, 1963.
- [41] A. J. Lotka. Elements of Physical Biology. *Baltim, Williams & Wilkins Co.* 1925.
- [42] I. Malkin. Some problems of the theory of nonlinear oscillations,(russian) gosudarstv. Izdat. Tehn.-Teor. Lit., Moscow, 1956.
- [43] S. Mashayekhi. Fractional forward Kolmogorov equations in population genetics. *Commun Nonlinear Sci Numer Simul.* 2023 ;126(107432) :15.
- [44] L. Niu and A. Ruiz-Herrera. Simple dynamics in non-monotone Kolmogorov system. *Proc Roy Soc Edinb Sect.* 2023;153(2) :369–384.
- [45] H. Poincaré. *Les méthodes nouvelles de la mécanique céleste*, volume 2. Gauthier-Villars et fils, imprimeurs-libraires, 1893.
- [46] B. W. Qin, K. W. Chung, A. Algaba and A. J. Rodríguez-Luis. High-order approximation of heteroclinic bifurcations in truncated 2D-normal forms for the generic cases of Hopf-zero and nonresonant double Hopf singularities. *SIAM J Appl Dyn Syst.* 2021 ;20 :403–437.
- [47] V. Reitmann. Verhulst, f., nonlinear differential equations and dynamical systems. berlin etc., springer-verlag 1990. ix, 227 pp., 107 figs., dm 38, 00 isbn 3-540-50628-4 (universitext). *Zeitschrift Angewandte Mathematik und Mechanik*, 72(1) :77–77, 1992.
- [48] M. Roseau. Vibrations non linéaires et théorie de la stabilité, *volume 8.* Springer, 1966.
- [49] J. A. Sanders, F. Verhulst, and J. Murdock. *Averaging methods in nonlinear dynamical systems*, volume 59. Springer, 2007.
- [50] J. Scheurle and J. Marsden. Bifurcation to quasi-periodic tori in the interaction of steady state and Hopf bifurcations. *SIAM J Math Anal.* 1984;15 :1055–1074.
- [51] G. Schmidt. Sanders, ja ; verhulst, f., averaging methods in nonlinear dynamical systems. berlin-heidelberg-new york-tokyo, springer-verlag 1985. x. 247 s., dm 84,-. 31 abb., isbn 3-540-96229-8 (applied mathematical sciences 59), 1987.
- [52] I. R. Shafarevich. *Basic algebraic geometry*, volume Band 213 of *Die Grundlehren der mathematischen Wissenschaften*. Springer-Verlag, New York-Heidelberg, 1974. Translated from the Russian by K. A. Hirsch.
- [53] S. H. Strogatz. *Nonlinear dynamics and chaos : with applications to physics, biology, chemistry, and engineering.* CRC press, 2018.
- [54] F. Verhulst . Nonlinear Differential Equations and Dynamical Systems. *Universitext, Springer.* 1991.
- [55] V. Volterra. Variazioni e fluttuazioni del numero d'individui in specie animali conviventi. *Memoire della R Accademia Nazionale dei Lincei, anno CCCCXXIII, II Nat.* 1926;118 :558–560.

Annexe

Dans cette annexe, nous allons montrer les calculs qui nous ont permis d'obtenir les fonctions $G_{11}, G_{12}, G_{13}, G_{21}, G_{22}, G_{23}, G_{31}, G_{32}, G_{33}$ du chapitre 4 (voir page 63).

Premièrement, nous redimensionnons les variables, en faisant le changement de variable $(x, y, z, w) = (\epsilon X, \epsilon Y, \epsilon Z, \epsilon W)$ dans le système (4.1) et nous obtenons le système

$$\begin{aligned} \dot{X} = & (a_{220}Y^4 + (Wa_{222} + Xa_{210} + Za_{221})Y^3 + (X^2a_{24} + (Wa_{214} + Za_{213})X + W^2a_{224} + \\ & ZW a_{225} + Z^2a_{223})Y^2 + (X^3a_{21} + (Wa_{28} + Za_{27})X^2 + (W^2a_{217} + WZa_{219} + Z^2a_{215})X \\ & + W^3a_{227} + ZW^2a_{229} + Z^2Wa_{228} + Z^3a_{226})Y + a_{20}X^4 + (Wa_{23} + Za_{22})X^3 + (W^2a_{26} + \\ & WZa_{29} + Z^2a_{25})X^2 + (W^3a_{212} + W^2Za_{218} + WZ^2a_{216} + Z^3a_{211})X + a_{234}W^4 + a_{233}W^3 \\ & Z + a_{232}W^2Z^2 + a_{231}WZ^3 + a_{230}Z^4)\epsilon^6 + (a_{120}Y^4 + (Wa_{122} + Xa_{110} + Za_{121})Y^3 + \\ & (X^2a_{14} + (Wa_{114} + Za_{113})X + W^2a_{124} + ZW a_{125} + Z^2a_{123})Y^2 + (X^3a_{11} + (Wa_{18} + \\ & Za_{17})X^2 + (W^2a_{117} + WZa_{119} + Z^2a_{115})X + W^3a_{127} + ZW^2a_{129} + Z^2Wa_{128} + Z^3a_{126}) \\ & Y + X^4a_{10} + (Wa_{13} + Za_{12})X^3 + (W^2a_{16} + WZa_{19} + Z^2a_{15})X^2 + (W^3a_{112} + W^2Za_{118} \\ & + WZ^2a_{116} + Z^3a_{111})X + W^4a_{134} + ZW^3a_{133} + Z^2W^2a_{132} + Z^3Wa_{131} + Z^4a_{130})\epsilon^5 + \\ & (a_{020}Y^4 + (Wa_{022} + Xa_{010} + Za_{021})Y^3 + (X^2a_{04} + (Wa_{014} + Za_{013})X + W^2a_{024} + \\ & ZW a_{025} + Z^2a_{023})Y^2 + (X^3a_{01} + (Wa_{08} + Za_{07})X^2 + (W^2a_{017} + WZa_{019} + Z^2a_{015})X \\ & + W^3a_{027} + ZW^2a_{029} + Z^2Wa_{028} + Z^3a_{026} - b_3)Y + X^4a_{00} + (Wa_{03} + Za_{02})X^3 + (W^2 \\ & a_{06} + WZa_{09} + Z^2a_{05})X^2 + (W^3a_{012} + W^2Za_{018} + WZ^2a_{016} + Z^3a_{011} + a_3)X + \\ & W^4a_{034} + ZW^3a_{033} + Z^2W^2a_{032} + Z^3Wa_{031} + Z^4a_{030})\epsilon^4 + (Xa_2 - Yb_2)\epsilon^3 + (Xa_1 \\ & - Yb_1)\epsilon^2 - \epsilon Yb, \\ \dot{Y} = & (b_{20}X^4 + (Wb_{23} + Yb_{21} + Zb_{22})X^3 + (Y^2b_{24} + (Wb_{28} + Zb_{27})Y + W^2b_{26} + WZb_{29} + \\ & Z^2b_{25})X^2 + (Y^3b_{210} + (Wb_{214} + Zb_{213})Y^2 + (W^2b_{217} + WZb_{219} + Z^2b_{215})Y + W^3b_{212} + \\ & ZW^2b_{218} + WZ^2b_{216} + Z^3b_{211})X + b_{220}Y^4 + (Wb_{222} + Zb_{221})Y^3 + (W^2b_{224} + WZb_{225} + \\ & Z^2b_{223})Y^2 + (W^3b_{227} + W^2Zb_{229} + WZ^2b_{228} + Z^3b_{226})Y + W^4b_{234} + ZW^3b_{233} + Z^2b_{232} \\ & W^2 + Z^3b_{231}W + Z^4b_{230})\epsilon^5 + (b_{10}X^4 + (Wb_{13} + Yb_{11} + Zb_{12})X^3 + (Y^2b_{14} + (Wb_{18} + \\ & Zb_{17})Y + W^2b_{16} + WZb_{19} + Z^2b_{15})X^2 + (Y^3b_{110} + (Wb_{114} + Zb_{113})Y^2 + (W^2b_{117} + W \\ & Zb_{119} + Z^2b_{115})Y + W^3b_{112} + ZW^2b_{118} + WZ^2b_{116} + Z^3b_{111})X + b_{120}Y^4 + (Wb_{122} + \\ & Zb_{121})Y^3 + (W^2b_{124} + WZb_{125} + Z^2b_{123})Y^2 + (W^3b_{127} + W^2Zb_{129} + WZ^2b_{128} + Z^3b_{126}) \\ & Y + b_{134}W^4 + Zb_{133}W^3 + Z^2W^2b_{132} + Z^3b_{131}W + Z^4b_{130})\epsilon^4 + (b_{00}X^4 + (Wb_{03} + Yb_{01} + \\ & Zb_{02})X^3 + (Y^2b_{04} + (Wb_{08} + Zb_{07})Y + W^2b_{06} + WZb_{09} + Z^2b_{05})X^2 + (Y^3b_{010} + \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& (Wb_{014} + Zb_{013})Y^2 + (W^2b_{017} + WZb_{019} + Z^2b_{015})Y + W^3b_{012} + ZW^2b_{018} + WZ^2b_{016} + \\
& Z^3b_{011} + b_3)X + b_{020}Y^4 + (Wb_{022} + Zb_{021})Y^3 + (W^2b_{024} + WZb_{025} + Z^2b_{023})Y^2 + (W^3 \\
& b_{027} + W^2Zb_{029} + WZ^2b_{028} + Z^3b_{026} + a_3)Y + W^4b_{034} + Zb_{033}W^3 + Z^2W^2b_{032} + Z^3b_{031} \\
& W + Z^4b_{030})\epsilon^3 + (Xb_2 + Ya_2)\epsilon^2 + (Xb_1 + Ya_1)\epsilon + Xb, \\
\dot{Z} = & (Z^4c_{230} + (Wc_{231} + Xc_{211} + Yc_{226})Z^3 + (c_{232}W^2 + (Xc_{216} + Yc_{228})W + c_{223}Y^2 + c_{25}X^2 \\
& + c_{215}XY)Z^2 + (c_{233}W^3 + (Xc_{218} + Yc_{229})W^2 + (X^2c_{29} + XYc_{219} + Y^2c_{225})W + c_{221}Y^3 \\
& + c_{22}X^3 + c_{27}X^2Y + c_{213}XY^2)Z + W^4c_{234} + (Xc_{212} + Yc_{227})W^3 + (X^2c_{26} + XYc_{217} + \\
& Y^2c_{224})W^2 + (X^3c_{23} + X^2Yc_{28} + XY^2c_{214} + Y^3c_{222})W + c_{20}X^4 + c_{21}X^3Y + c_{24}X^2Y^2 \\
& + c_{210}XY^3 + c_{220}Y^4)\epsilon^5 + (Z^4c_{130} + (Wc_{131} + Xc_{111} + Yc_{126})Z^3 + (c_{132}W^2 + (Xc_{116} + \\
& Yc_{128})W + c_{15}X^2 + c_{115}XY + c_{123}Y^2)Z^2 + (c_{133}W^3 + (Xc_{118} + Yc_{129})W^2 + (X^2c_{19} + \\
& XYc_{119} + Y^2c_{125})W + c_{12}X^3 + c_{17}X^2Y + c_{113}XY^2 + c_{121}Y^3)Z + c_{134}W^4 + (Xc_{112} + \\
& Yc_{127})W^3 + (X^2c_{16} + XYc_{117} + Y^2c_{124})W^2 + (X^3c_{13} + X^2Yc_{18} + XY^2c_{114} + Y^3c_{122}) \\
& W + c_{10}X^4 + c_{11}X^3Y + c_{14}X^2Y^2 + c_{110}XY^3 + c_{120}Y^4)\epsilon^4 + (Z^4c_{030} + (Wc_{031} + Xc_{011} \\
& + Yc_{026})Z^3 + (c_{032}W^2 + (Xc_{016} + Yc_{028})W + c_{05}X^2 + c_{015}XY + c_{023}Y^2)Z^2 + (c_{033}W^3 \\
& + (Xc_{018} + Yc_{029})W^2 + (X^2c_{09} + XYc_{019} + Y^2c_{025})W + c_{02}X^3 + c_{07}X^2Y + c_{013}XY^2 + \\
& c_{021}Y^3 + c_3)Z + c_{034}W^4 + (Xc_{012} + Yc_{027})W^3 + (X^2c_{06} + XYc_{017} + Y^2c_{024})W^2 + (X^3 \\
& c_{03} + X^2Yc_{08} + XY^2c_{014} + Y^3c_{022})W + c_{04}X^2Y^2 + c_{00}X^4 + c_{01}X^3Y + c_{010}XY^3 + c_{020} \\
& Y^4)\epsilon^3 + c_2Z\epsilon^2 + Zc_1\epsilon, \\
\dot{W} = & (d_{234}W^4 + (Xd_{212} + Yd_{227} + Zd_{233})W^3 + (d_{26}X^2 + (Yd_{217} + Zd_{218})X + d_{224}Y^2 + d_{229} \\
& YZ + d_{232}Z^2)W^2 + (d_{23}X^3 + (Yd_{28} + Zd_{29})X^2 + (Y^2d_{214} + YZd_{219} + Z^2d_{216})X + d_{222} \\
& Y^3 + d_{225}Y^2Z + d_{228}YZ^2 + d_{231}Z^3)W + d_{20}X^4 + (Yd_{21} + Zd_{22})X^3 + (Y^2d_{24} + YZd_{27} \\
& + Z^2d_{25})X^2 + (Y^3d_{210} + Y^2Zd_{213} + YZ^2d_{215} + Z^3d_{211})X + ZY^3d_{221} + Z^2d_{223}Y^2 + Z^3 \\
& d_{226}Y + Z^4d_{230} + d_{220}Y^4)\epsilon^5 + (W^4d_{134} + (Xd_{112} + Yd_{127} + Zd_{133})W^3 + (d_{16}X^2 + (Y \\
& d_{117} + Zd_{118})X + d_{124}Y^2 + d_{129}YZ + d_{132}Z^2)W^2 + (d_{13}X^3 + (Yd_{18} + Zd_{19})X^2 + (Y^2 \\
& d_{114} + YZd_{119} + Z^2d_{116})X + Y^3d_{122} + d_{125}Y^2Z + d_{128}YZ^2 + d_{131}Z^3)W + d_{10}X^4 + (Y \\
& d_{11} + Zd_{12})X^3 + (Y^2d_{14} + YZd_{17} + Z^2d_{15})X^2 + (Y^3d_{110} + Y^2Zd_{113} + YZ^2d_{115} + Z^3d_{111}) \\
& X + Y^4d_{120} + Zd_{121}Y^3 + Z^2d_{123}Y^2 + Z^3d_{126}Y + Z^4d_{130})\epsilon^4 + (d_{034}W^4 + (Xd_{012} + Yd_{027} \\
& + Zd_{033})W^3 + (d_{06}X^2 + (Yd_{017} + Zd_{018})X + Y^2d_{024} + d_{029}YZ + d_{032}Z^2)W^2 + (d_{03}X^3 + \\
& (Yd_{08} + Zd_{09})X^2 + (Y^2d_{014} + YZd_{019} + Z^2d_{016})X + Y^3d_{022} + d_{025}Y^2Z + d_{028}YZ^2 + d_{031} \\
& Z^3 + d_3)W + d_{00}X^4 + (Yd_{01} + Zd_{02})X^3 + (Y^2d_{04} + YZd_{07} + Z^2d_{05})X^2 + (Y^3d_{010} + Y^2 \\
& Zd_{013} + YZ^2d_{015} + Z^3d_{011})X + d_{020}Y^4 + ZY^3d_{021} + Z^2d_{023}Y^2 + Z^3d_{026}Y + Z^4d_{030})\epsilon^3 + \\
& d_2W\epsilon^2 + Wd_1\epsilon.
\end{aligned} \tag{4.10}$$

Deuxièmement, nous passons aux coordonnées cylindriques en faisant le changement de variable $(X, Y, Z, W) = (\alpha \cos \theta, \alpha \sin \theta, \beta, \xi)$ dans le système (4.10), nous obtenons le système

$$\begin{aligned}
\dot{\alpha} = & \left(-(b_{21} - a_{220} - b_{210} - a_{20} + a_{24})\alpha^4 \cos(\theta)^5 - (-(a_{21} - a_{210} + b_{20} - b_{24} + b_{220})\alpha \sin(\theta) + \right. \\
& (b_{27} + a_{213} - b_{221} - a_{22})\beta + \xi(b_{28} + a_{214} - b_{222} - a_{23}))\alpha^3 \cos(\theta)^4 - (-(b_{22} - a_{221} - b_{213} + \\
& a_{27})\beta + \xi(b_{23} - a_{222} - b_{214} + a_{28}))\alpha \sin(\theta) + (-b_{21} + 2a_{220} + 2b_{210} - a_{24})\alpha^2 + (a_{223} + b_{215} \\
& - a_{25})\beta^2 + \xi(a_{225} + b_{219} - a_{29})\beta + \xi^2(a_{224} + b_{217} - a_{26}))\alpha^2 \cos(\theta)^3 + (((b_{24} + a_{210} - 2b_{220}) \\
& \alpha^2 + (b_{25} + a_{215} - b_{223})\beta^2 + \xi(b_{29} + a_{219} - b_{225})\beta + \xi^2(b_{26} + a_{217} - b_{224}))\alpha \sin(\theta) + ((b_{27} \\
& + a_{213} - 2b_{221})\beta + \xi(b_{28} + a_{214} - 2b_{222}))\alpha^2 + (a_{211} - b_{226})\beta^3 + \xi(a_{216} - b_{228})\beta^2 + \xi^2(a_{218} \\
& - b_{229})\beta + \xi^3(a_{212} - b_{227}))\alpha \cos(\theta)^2 + (((((a_{221} + b_{213})\beta + \xi(a_{222} + b_{214}))\alpha^2 + (a_{226} + b_{211}) \\
& \beta^3 + \xi(a_{228} + b_{216})\beta^2 + \xi^2(a_{229} + b_{218})\beta + \xi^3(a_{227} + b_{212}))\alpha \sin(\theta) + (a_{220} + b_{210})\alpha^4 + \\
& ((a_{223} + b_{215})\beta^2 + \xi(a_{225} + b_{219})\beta + \xi^2(a_{224} + b_{217}))\alpha^2 + \xi^4 a_{234} + \beta \xi^3 a_{233} + \beta^2 \xi^2 a_{232} + \beta^3 \\
& \xi a_{231} + \beta^4 a_{230}) \cos(\theta) + (b_{220}\alpha^4 + (\beta^2 b_{223} + \beta \xi b_{225} + \xi^2 b_{224})\alpha^2 + \xi^4 b_{234} + \beta \xi^3 b_{233} + \beta^2 \xi^2 \\
& b_{232} + \beta^3 \xi b_{231} + \beta^4 b_{230}) \sin(\theta) + ((\beta b_{221} + \xi b_{222})\alpha^2 + \xi^3 b_{227} + \beta \xi^2 b_{229} + \beta^2 \xi b_{228} + \beta^3 b_{226} \\
&)\alpha \epsilon^5 + (-(b_{11} - a_{120} - b_{110} - a_{10} + a_{14})\alpha^4 \cos(\theta)^5 - (-(b_{14} - a_{110} + b_{120} + b_{10} + a_{11})\alpha \\
& \sin(\theta) + (b_{17} + a_{113} - b_{121} - a_{12})\beta + \xi(b_{18} + a_{114} - b_{122} - a_{13}))\alpha^3 \cos(\theta)^4 - (-(b_{12} - a_{121} \\
& - b_{113} + a_{17})\beta + \xi(b_{13} - a_{122} - b_{114} + a_{18}))\alpha \sin(\theta) + (-b_{11} + 2a_{120} + 2b_{110} - a_{14})\alpha^2 + \\
& (a_{123} + b_{115} - a_{15})\beta^2 + \xi(a_{125} + b_{119} - a_{19})\beta + \xi^2(a_{124} + b_{117} - a_{16}))\alpha^2 \cos(\theta)^3 + (((b_{14} + \\
& a_{110} - 2b_{120})\alpha^2 + (b_{15} + a_{115} - b_{123})\beta^2 + \xi(b_{19} + a_{119} - b_{125})\beta + \xi^2(b_{16} + a_{117} - b_{124}))\alpha \\
& \sin(\theta) + ((b_{17} + a_{113} - 2b_{121})\beta + \xi(b_{18} + a_{114} - 2b_{122}))\alpha^2 + (a_{111} - b_{126})\beta^3 + \xi(a_{116} - b_{128}) \\
& \beta^2 + \xi^2(a_{118} - b_{129})\beta + \xi^3(a_{112} - b_{127}))\alpha \cos(\theta)^2 + (((((a_{121} + b_{113})\beta + \xi(a_{122} + b_{114}))\alpha^2 + \\
& (a_{126} + b_{111})\beta^3 + \xi(a_{128} + b_{116})\beta^2 + \xi^2(a_{129} + b_{118})\beta + \xi^3(a_{127} + b_{112}))\alpha \sin(\theta) + (a_{120} + \\
& b_{110})\alpha^4 + ((a_{123} + b_{115})\beta^2 + \xi(a_{125} + b_{119})\beta + \xi^2(a_{124} + b_{117}))\alpha^2 + \xi^4 a_{134} + \beta \xi^3 a_{133} + \beta^2 \xi^2 \\
& a_{132} + \beta^3 \xi a_{131} + \beta^4 a_{130}) \cos(\theta) + (b_{120}\alpha^4 + (\beta^2 b_{123} + \beta \xi b_{125} + \xi^2 b_{124})\alpha^2 + \xi^4 b_{134} + \beta \xi^3 b_{133} \\
& + \beta^2 \xi^2 b_{132} + \beta^3 \xi b_{131} + \beta^4 b_{130}) \sin(\theta) + ((\beta b_{121} + \xi b_{122})\alpha^2 + \xi^3 b_{127} + \beta \xi^2 b_{129} + \beta^2 \xi b_{128} + \\
& \beta^3 b_{126})\alpha \epsilon^4 + (-(a_{04} + b_{01} - a_{020} - b_{010} - a_{00})\alpha^4 \cos(\theta)^5 - (-(a_{01} - b_{04} - a_{010} + b_{020} + \\
& b_{00})\alpha \sin(\theta) + (-a_{02} + b_{07} + a_{013} - b_{021})\beta - \xi(a_{03} - b_{08} - a_{014} + b_{022}))\alpha^3 \cos(\theta)^4 - (-(\\
& (a_{07} + b_{02} - a_{021} - b_{013})\beta + \xi(a_{08} + b_{03} - a_{022} - b_{014}))\alpha \sin(\theta) + (-a_{04} - b_{01} + 2a_{020} + \\
& 2b_{010})\alpha^2 + (-a_{05} + a_{023} + b_{015})\beta^2 - \xi(a_{09} - a_{025} - b_{019})\beta - \xi^2(a_{06} - a_{024} - b_{017}))\alpha^2 \\
& \cos(\theta)^3 + (((b_{04} + a_{010} - 2b_{020})\alpha^2 + (b_{05} + a_{015} - b_{023})\beta^2 + \xi(b_{09} + a_{019} - b_{025})\beta + \xi^2(b_{06} \\
& + a_{017} - b_{024}))\alpha \sin(\theta) + ((b_{07} + a_{013} - 2b_{021})\beta + \xi(b_{08} + a_{014} - 2b_{022}))\alpha^2 + (a_{011} - b_{026})\beta^3 \\
& + \xi(a_{016} - b_{028})\beta^2 + \xi^2(a_{018} - b_{029})\beta + \xi^3(a_{012} - b_{027}))\alpha \cos(\theta)^2 + (((((a_{021} + b_{013})\beta + \xi \\
& (a_{022} + b_{014}))\alpha^2 + (a_{026} + b_{011})\beta^3 + \xi(a_{028} + b_{016})\beta^2 + \xi^2(a_{029} + b_{018})\beta + \xi^3(a_{027} + b_{012}))\alpha \\
& \sin(\theta) + (a_{020} + b_{010})\alpha^4 + ((a_{023} + b_{015})\beta^2 + \xi(a_{025} + b_{019})\beta + \xi^2(a_{024} + b_{017}))\alpha^2 + \xi^4 a_{034} \\
& + a_{033}\xi^3\beta + \beta^2 \xi^2 a_{032} + \beta^3 \xi a_{031} + \beta^4 a_{030}) \cos(\theta) + (b_{020}\alpha^4 + (\beta^2 b_{023} + \beta \xi b_{025} + \xi^2 b_{024})\alpha^2 \\
& + \xi^4 b_{034} + \beta \xi^3 b_{033} + \beta^2 \xi^2 b_{032} + \beta^3 \xi b_{031} + \beta^4 b_{030}) \sin(\theta) + ((\beta b_{021} + \xi b_{022})\alpha^2 + \xi^3 b_{027} + \beta \xi^2 \\
& b_{029} + \beta^2 \xi b_{028} + \beta^3 b_{026} + a_3)\alpha \epsilon^3 + \alpha a_2 \epsilon^2 + \epsilon \alpha a_1 ,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\dot{\theta} = & \frac{1}{\alpha} (((a_{21} - a_{210} + b_{20} - b_{24} + b_{220})\alpha^4 \cos(\theta)^5 + ((b_{21} - a_{220} - b_{210} - a_{20} + a_{24})\alpha \sin(\theta) + \\
& (b_{22} - a_{221} - b_{213} + a_{27})\beta + \xi(b_{23} - a_{222} - b_{214} + a_{28}))\alpha^3 \cos(\theta)^4 + (((b_{27} + a_{213} - b_{221} - \\
& a_{22})\beta + \xi(b_{28} + a_{214} - b_{222} - a_{23}))\alpha \sin(\theta) + (b_{24} + 2a_{210} - 2b_{220} - a_{21})\alpha^2 + (b_{25} + a_{215} \\
& - b_{223})\beta^2 + \xi(b_{29} + a_{219} - b_{225})\beta + \xi^2(b_{26} + a_{217} - b_{224}))\alpha^2 \cos(\theta)^3 + (((2a_{220} + b_{210} - a_{24}) \\
& \alpha^2 + (a_{223} - a_{25} + b_{215})\beta^2 + \xi(a_{225} + b_{219} - a_{29})\beta + \xi^2(a_{224} + b_{217} - a_{26}))\alpha \sin(\theta) + ((b_{213} \\
& - a_{27} + 2a_{221})\beta + \xi(b_{214} - a_{28} + 2a_{222}))\alpha^2 + (b_{211} + a_{226})\beta^3 + \xi(a_{228} + b_{216})\beta^2 + \xi^2(a_{229} + \\
& - b_{218})\beta + \xi^3(a_{227} + b_{212}))\alpha \cos(\theta)^2 + (-\alpha(((a_{213} - b_{221})\beta + \xi(a_{214} - b_{222}))\alpha^2 + (a_{211} - \\
& b_{226})\beta^3 + \xi(a_{216} - b_{228})\beta^2 + \xi^2(a_{218} - b_{229})\beta + \xi^3(a_{212} - b_{227})) \sin(\theta) + (-a_{210} + b_{220})\alpha^4 \\
& + ((-a_{215} + b_{223})\beta^2 - \xi(a_{219} - b_{225})\beta - \xi^2(a_{217} - b_{224}))\alpha^2 + \xi^4 b_{234} + \beta \xi^3 b_{233} + \beta^2 \xi^2 b_{232} \\
& + \beta^3 \xi b_{231} + \beta^4 b_{230}) \cos(\theta) - (\alpha^4 a_{220} + (\beta^2 a_{223} + \beta \xi a_{225} + \xi^2 a_{224})\alpha^2 + \beta^4 a_{230} + \beta^3 \xi a_{231} \\
& + \beta^2 \xi^2 a_{232} + \beta \xi^3 a_{233} + \xi^4 a_{234}) \sin(\theta) + ((-\beta a_{221} - \xi a_{222})\alpha^2 - \beta^3 a_{226} - a_{227} \xi^3 - \beta^2 \xi a_{228} \\
& - \beta \xi^2 a_{229})\alpha \epsilon^5 + ((-b_{14} - a_{110} + b_{120} + b_{10} + a_{11})\alpha^4 \cos(\theta)^5 + ((b_{11} - a_{120} - b_{110} - a_{10} \\
& + a_{14})\alpha \sin(\theta) + (b_{12} - a_{121} - b_{113} + a_{17})\beta + \xi(b_{13} - a_{122} - b_{114} + a_{18}))\alpha^3 \cos(\theta)^4 + ((\\
& (b_{17} + a_{113} - b_{121} - a_{12})\beta + \xi(b_{18} + a_{114} - b_{122} - a_{13}))\alpha \sin(\theta) + (b_{14} + 2a_{110} - 2b_{120} - \\
& a_{11})\alpha^2 + (b_{15} + a_{115} - b_{123})\beta^2 + \xi(b_{19} + a_{119} - b_{125})\beta + \xi^2(b_{16} + a_{117} - b_{124}))\alpha^2 \cos(\theta)^3 \\
& + (((2a_{120} - a_{14} + b_{110})\alpha^2 + (a_{123} - a_{15} + b_{115})\beta^2 + \xi(a_{125} + b_{119} - a_{19})\beta + \xi^2(a_{124} + \\
& b_{117} - a_{16}))\alpha \sin(\theta) + ((-a_{17} + b_{113} + 2a_{121})\beta + \xi(2a_{122} - a_{18} + b_{114}))\alpha^2 + (b_{111} + a_{126}) \\
& \beta^3 + \xi(a_{128} + b_{116})\beta^2 + \xi^2(a_{129} + b_{118})\beta + \xi^3(a_{127} + b_{112}))\alpha \cos(\theta)^2 + (-\alpha(((a_{113} - b_{121}) \\
& \beta + \xi(a_{114} - b_{122}))\alpha^2 + (a_{111} - b_{126})\beta^3 + \xi(a_{116} - b_{128})\beta^2 + \xi^2(a_{118} - b_{129})\beta + \xi^3(a_{112} - \\
& b_{127})) \sin(\theta) + (-a_{110} + b_{120})\alpha^4 + ((-a_{115} + b_{123})\beta^2 - \xi(a_{119} - b_{125})\beta - \xi^2(a_{117} - b_{124})) \\
& \alpha^2 + \beta^4 b_{130} + \beta^3 \xi b_{131} + \beta^2 \xi^2 b_{132} + \beta \xi^3 b_{133} + \xi^4 b_{134}) \cos(\theta) - (\alpha^4 a_{120} + (\beta^2 a_{123} + \beta \xi a_{125} \\
& + \xi^2 a_{124})\alpha^2 + \beta^4 a_{130} + \beta^3 \xi a_{131} + \beta^2 \xi^2 a_{132} + \beta \xi^3 a_{133} + \xi^4 a_{134}) \sin(\theta) + ((-\beta a_{121} - \xi a_{122}) \\
& \alpha^2 - \beta^3 a_{126} - a_{127} \xi^3 - \beta^2 \xi a_{128} - \beta \xi^2 a_{129})\alpha \epsilon^4 + ((a_{01} - b_{04} - a_{010} + b_{020} + b_{00})\alpha^4 \cos(\theta)^5 \\
& + ((a_{04} + b_{01} - a_{020} - b_{010} - a_{00})\alpha \sin(\theta) + (a_{07} + b_{02} - a_{021} - b_{013})\beta + \xi(a_{08} + b_{03} - a_{022} \\
& - b_{014}))\alpha^3 \cos(\theta)^4 + (((-a_{02} + b_{07} + a_{013} - b_{021})\beta - \xi(a_{03} - b_{08} - a_{014} + b_{022}))\alpha \sin(\theta) + \\
& (-a_{01} + b_{04} + 2a_{010} - 2b_{020})\alpha^2 + (b_{05} + a_{015} - b_{023})\beta^2 + \xi(b_{09} + a_{019} - b_{025})\beta + \xi^2(b_{06} + \\
& a_{017} - b_{024}))\alpha^2 \cos(\theta)^3 + (((2a_{020} + b_{010} - a_{04})\alpha^2 + (b_{015} - a_{05} + a_{023})\beta^2 - \xi(a_{09} - a_{025} \\
& - b_{019})\beta - \xi^2(a_{06} - a_{024} - b_{017}))\alpha \sin(\theta) + ((2a_{021} + b_{013} - a_{07})\beta - \xi(-2a_{022} - b_{014} + a_{08} \\
&))\alpha^2 + (b_{011} + a_{026})\beta^3 + \xi(a_{028} + b_{016})\beta^2 + \xi^2(a_{029} + b_{018})\beta + \xi^3(a_{027} + b_{012}))\alpha \cos(\theta)^2 + \\
& (-\alpha(((a_{013} - b_{021})\beta + \xi(a_{014} - b_{022}))\alpha^2 + (a_{011} - b_{026})\beta^3 + \xi(a_{016} - b_{028})\beta^2 + \xi^2(a_{018} - \\
& b_{029})\beta + \xi^3(a_{012} - b_{027})) \sin(\theta) + (-a_{010} + b_{020})\alpha^4 + ((-a_{015} + b_{023})\beta^2 - \xi(a_{019} - b_{025})\beta \\
& - \xi^2(a_{017} - b_{024}))\alpha^2 + \xi^4 b_{034} + \beta \xi^3 b_{033} + \beta^2 \xi^2 b_{032} + \beta^3 \xi b_{031} + \beta^4 b_{030}) \cos(\theta) - (a_{020} \alpha^4 + \\
& (\beta^2 a_{023} + \beta \xi a_{025} + \xi^2 a_{024})\alpha^2 + \xi^4 a_{034} + a_{033} \xi^3 \beta + \beta^2 \xi^2 a_{032} + \beta^3 \xi a_{031} + \beta^4 a_{030}) \sin(\theta) + \\
& ((-\beta a_{021} - \xi a_{022})\alpha^2 - \xi^3 a_{027} - \beta \xi^2 a_{029} - \beta^2 \xi a_{028} - \beta^3 a_{026} + b_3)\alpha \epsilon^3) + \epsilon^2 b_2 + \epsilon b_1 + b,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\dot{\beta} = & \left(-(-c_{20} + c_{24} - c_{220})\alpha^4 \cos(\theta)^4 + (-(-c_{21} + c_{210})\alpha \sin(\theta) + (c_{22} - c_{213})\beta + \xi(c_{23} - c_{214})) \right. \\
& \alpha^3 \cos(\theta)^3 - (((c_{221} - c_{27})\beta + \xi(c_{222} - c_{28}))\alpha \sin(\theta) + (-c_{24} + 2c_{220})\alpha^2 + (c_{223} - c_{25})\beta^2 + \\
& \xi(c_{225} - c_{29})\beta + \xi^2(c_{224} - c_{26}))\alpha^2 \cos(\theta)^2 + ((\alpha^2 c_{210} + \beta^2 c_{215} + \beta \xi c_{219} + \xi^2 c_{217})\alpha \sin(\theta) + \\
& (\beta c_{213} + \xi c_{214})\alpha^2 + \xi^3 c_{212} + \xi^2 c_{218}\beta + \xi c_{216}\beta^2 + c_{211}\beta^3)\alpha \cos(\theta) + ((\beta c_{221} + \xi c_{222})\alpha^2 + \\
& c_{227}\xi^3 + \xi^2 c_{229}\beta + \xi c_{228}\beta^2 + c_{226}\beta^3)\alpha \sin(\theta) + c_{220}\alpha^4 + (\beta^2 c_{223} + \beta \xi c_{225} + \xi^2 c_{224})\alpha^2 + \xi^4 \\
& c_{234} + c_{233}\xi^3\beta + c_{232}\xi^2\beta^2 + c_{231}\xi\beta^3 + c_{230}\beta^4)\epsilon^5 + (-(-c_{10} + c_{14} - c_{120})\alpha^4 \cos(\theta)^4 + (- \\
& (-c_{11} + c_{110})\alpha \sin(\theta) + (c_{12} - c_{113})\beta + \xi(c_{13} - c_{114}))\alpha^3 \cos(\theta)^3 - (((-c_{17} + c_{121})\beta - \xi(c_{18} \\
& - c_{122}))\alpha \sin(\theta) + (-c_{14} + 2c_{120})\alpha^2 + (-c_{15} + c_{123})\beta^2 - \xi(c_{19} - c_{125})\beta - \xi^2(c_{16} - c_{124}))\alpha^2 \\
& \cos(\theta)^2 + ((\alpha^2 c_{110} + \beta^2 c_{115} + \beta \xi c_{119} + \xi^2 c_{117})\alpha \sin(\theta) + (\beta c_{113} + \xi c_{114})\alpha^2 + \xi^3 c_{112} + \xi^2 c_{118} \\
& \beta + \xi c_{116}\beta^2 + c_{111}\beta^3)\alpha \cos(\theta) + ((\beta c_{121} + \xi c_{122})\alpha^2 + c_{127}\xi^3 + \beta \xi^2 c_{129} + \xi c_{128}\beta^2 + c_{126}\beta^3)\alpha \\
& \sin(\theta) + \alpha^4 c_{120} + (\beta^2 c_{123} + \beta \xi c_{125} + \xi^2 c_{124})\alpha^2 + \xi^4 c_{134} + c_{133}\xi^3\beta + c_{132}\xi^2\beta^2 + c_{131}\xi\beta^3 + \\
& c_{130}\beta^4)\epsilon^4 + (-c_{04} - c_{020} - c_{00})\alpha^4 \cos(\theta)^4 + (-c_{010} - c_{01})\alpha \sin(\theta) + (c_{02} - c_{013})\beta + \xi(c_{03} \\
& - c_{014})\alpha^3 \cos(\theta)^3 - (((-c_{07} + c_{021})\beta - \xi(c_{08} - c_{022}))\alpha \sin(\theta) + (-c_{04} + 2c_{020})\alpha^2 + (-c_{05} \\
& + c_{023})\beta^2 - \xi(c_{09} - c_{025})\beta - \xi^2(c_{06} - c_{024}))\alpha^2 \cos(\theta)^2 + ((\alpha^2 c_{010} + \beta^2 c_{015} + \beta \xi c_{019} + \xi^2 c_{017} \\
&)\alpha \sin(\theta) + (\beta c_{013} + \xi c_{014})\alpha^2 + c_{012}\xi^3 + c_{018}\xi^2\beta + c_{016}\beta^2\xi + c_{011}\beta^3)\alpha \cos(\theta) + ((\beta c_{021} + \xi \\
& c_{022})\alpha^2 + c_{027}\xi^3 + c_{029}\xi^2\beta + \xi\beta^2 c_{028} + c_{026}\beta^3)\alpha \sin(\theta) + \alpha^4 c_{020} + (\beta^2 c_{023} + \beta \xi c_{025} + \xi^2 c_{024}) \\
& \alpha^2 + c_{030}\beta^4 + c_{031}\xi\beta^3 + c_{032}\xi^2\beta^2 + (\xi^3 c_{033} + c_3)\beta + \xi^4 c_{034})\epsilon^3 + c_2\beta\epsilon^2 + \beta c_1\epsilon, \\
\dot{\xi} = & \left(-(-d_{20} + d_{24} - d_{220})\alpha^4 \cos(\theta)^4 + (-(-d_{21} + d_{210})\alpha \sin(\theta) + \xi(d_{23} - d_{214}) + \beta(d_{22} - d_{213}) \right. \\
&)\alpha^3 \cos(\theta)^3 - ((\xi(d_{222} - d_{28}) + \beta(d_{221} - d_{27}))\alpha \sin(\theta) + (-d_{24} + 2d_{220})\alpha^2 + \xi^2(d_{224} - d_{26}) \\
& + \beta(d_{225} - d_{29})\xi + \beta^2(d_{223} - d_{25}))\alpha^2 \cos(\theta)^2 + ((\alpha^2 d_{210} + \beta^2 d_{215} + \beta \xi d_{219} + \xi^2 d_{217})\alpha \sin(\theta) \\
& + (\beta d_{213} + \xi d_{214})\alpha^2 + \xi^3 d_{212} + \beta d_{218}\xi^2 + \beta^2 d_{216}\xi + \beta^3 d_{211})\alpha \cos(\theta) + ((\beta d_{221} + \xi d_{222})\alpha^2 + \\
& d_{227}\xi^3 + d_{229}\beta\xi^2 + d_{228}\beta^2\xi + d_{226}\beta^3)\alpha \sin(\theta) + d_{220}\alpha^4 + (\beta^2 d_{223} + \beta \xi d_{225} + \xi^2 d_{224})\alpha^2 + \\
& d_{234}\xi^4 + d_{233}\xi^3\beta + d_{232}\xi^2\beta^2 + d_{231}\xi\beta^3 + \beta^4 d_{230})\epsilon^5 + (-(-d_{10} + d_{14} - d_{120})\alpha^4 \cos(\theta)^4 + (- \\
& (-d_{11} + d_{110})\alpha \sin(\theta) + \xi(d_{13} - d_{114}) + \beta(d_{12} - d_{113}))\alpha^3 \cos(\theta)^3 - (((-d_{18} + d_{122})\xi - \beta(d_{17} \\
& - d_{121}))\alpha \sin(\theta) + (-d_{14} + 2d_{120})\alpha^2 + (-d_{16} + d_{124})\xi^2 - \beta(d_{19} - d_{125})\xi - \beta^2(d_{15} - d_{123}))\alpha^2 \\
& \cos(\theta)^2 + ((\alpha^2 d_{110} + \beta^2 d_{115} + \beta \xi d_{119} + \xi^2 d_{117})\alpha \sin(\theta) + (\beta d_{113} + \xi d_{114})\alpha^2 + \xi^3 d_{112} + \beta d_{118} \\
& \xi^2 + \beta^2 d_{116}\xi + \beta^3 d_{111})\alpha \cos(\theta) + ((\beta d_{121} + \xi d_{122})\alpha^2 + d_{127}\xi^3 + \beta \xi^2 d_{129} + \beta^2 d_{128}\xi + \beta^3 d_{126}) \\
& \alpha \sin(\theta) + \alpha^4 d_{120} + (\beta^2 d_{123} + \beta \xi d_{125} + \xi^2 d_{124})\alpha^2 + d_{134}\xi^4 + d_{133}\xi^3\beta + d_{132}\xi^2\beta^2 + d_{131}\xi\beta^3 + \\
& \beta^4 d_{130})\epsilon^4 + (-d_{04} - d_{020} - d_{00})\alpha^4 \cos(\theta)^4 + (-d_{010} - d_{01})\alpha \sin(\theta) + \xi(d_{03} - d_{014}) + \beta(d_{02} \\
& - d_{013})\alpha^3 \cos(\theta)^3 - (((-d_{08} + d_{022})\xi - \beta(d_{07} - d_{021}))\alpha \sin(\theta) + (-d_{04} + 2d_{020})\alpha^2 + (-d_{06} \\
& + d_{024})\xi^2 - \beta(d_{09} - d_{025})\xi - \beta^2(d_{05} - d_{023}))\alpha^2 \cos(\theta)^2 + ((\alpha^2 d_{010} + \beta^2 d_{015} + \beta \xi d_{019} + \xi^2 \\
& d_{017})\alpha \sin(\theta) + (\beta d_{013} + \xi d_{014})\alpha^2 + \xi^3 d_{012} + d_{018}\xi^2\beta + d_{016}\beta^2\xi + d_{011}\beta^3)\alpha \cos(\theta) + ((\beta d_{021} \\
& + \xi d_{022})\alpha^2 + d_{027}\xi^3 + d_{029}\xi^2\beta + \xi\beta^2 d_{028} + d_{026}\beta^3)\alpha \sin(\theta) + \alpha^4 d_{020} + (\beta^2 d_{023} + \beta \xi d_{025} + \xi^2 \\
& d_{024})\alpha^2 + d_{034}\xi^4 + d_{033}\xi^3\beta + d_{032}\xi^2\beta^2 + (\beta^3 d_{031} + d_3)\xi + \beta^4 d_{030})\epsilon^3 + d_2\xi\epsilon^2 + \xi d_1\epsilon.
\end{aligned}$$

(4.11)

Enfin, nous prenons l'angle θ comme nouvelle variable indépendante. Ainsi, dans les variables (α, β, ξ) , le système (4.11) s'écrit

$$\begin{aligned}
\frac{d\alpha}{d\theta} &= \epsilon G_{11}(\theta, \alpha, \beta, \xi) + \epsilon^2 G_{21}(\theta, \alpha, \beta, \xi) + \epsilon^3 G_{31}(\theta, \alpha, \beta, \xi) + O(\epsilon^4), \\
&= \frac{a_1\alpha}{b}\epsilon + \frac{(ba_2 - a_1b_1)\alpha}{b^2}\epsilon^2 + \\
&\quad \frac{\epsilon^3}{b^3}(-b^2\alpha^4(a_{04} + b_{01} - a_{020} - b_{010} - a_{00})\cos(\theta)^5 + (\alpha(a_{01} - a_{010} + b_{00} - b_{04} + b_{020})\sin(\theta) \\
&\quad + (a_{02} - b_{07} - a_{013} + b_{021})\beta + \xi(a_{03} - b_{08} - a_{014} + b_{022}))\alpha^3b^2\cos(\theta)^4 + (\alpha((a_{07} + b_{02} - \\
&\quad a_{021} - b_{013})\beta + \xi(a_{08} + b_{03} - a_{022} - b_{014}))\sin(\theta) + (a_{04} + b_{01} - 2a_{020} - 2b_{010})\alpha^2 + (a_{05} \\
&\quad - a_{023} - b_{015})\beta^2 + \xi(a_{09} - a_{025} - b_{019})\beta + \xi^2(a_{06} - a_{024} - b_{017}))\alpha^2b^2\cos(\theta)^3 + \alpha(\alpha((b_{04} \\
&\quad + a_{010} - 2b_{020})\alpha^2 + (b_{05} + a_{015} - b_{023})\beta^2 + \xi(b_{09} + a_{019} - b_{025})\beta + \xi^2(b_{06} + a_{017} - b_{024})) \\
&\quad \sin(\theta) + ((b_{07} + a_{013} - 2b_{021})\beta + \xi(b_{08} + a_{014} - 2b_{022}))\alpha^2 + (a_{011} - b_{026})\beta^3 + \xi(a_{016} - \\
&\quad b_{028})\beta^2 + \xi^2(a_{018} - b_{029})\beta + \xi^3(a_{012} - b_{027}))b^2\cos(\theta)^2 + (\alpha(((a_{021} + b_{013})\beta + \xi(a_{022} + \\
&\quad b_{014}))\alpha^2 + (a_{026} + b_{011})\beta^3 + \xi(a_{028} + b_{016})\beta^2 + \xi^2(a_{029} + b_{018})\beta + \xi^3(a_{027} + b_{012}))\sin(\theta) \\
&\quad + (a_{020} + b_{010})\alpha^4 + ((a_{023} + b_{015})\beta^2 + \xi(a_{025} + b_{019})\beta + \xi^2(a_{024} + b_{017}))\alpha^2 + a_{034}\xi^4 + \\
&\quad a_{033}\xi^3\beta + \beta^2\xi^2a_{032} + \beta^3\xi a_{031} + \beta^4a_{030})b^2\cos(\theta) + b^2(\alpha^4b_{020} + (\beta^2b_{023} + \beta\xi b_{025} + \xi^2b_{024}) \\
&\quad \alpha^2 + \xi^4b_{034} + \xi^3b_{033}\beta + \xi^2b_{032}\beta^2 + \xi b_{031}\beta^3 + b_{030}\beta^4)\sin(\theta) + ((\beta b_{021} + \xi b_{022})\alpha^2 + \xi^3 \\
&\quad b_{027} + \beta\xi^2b_{029} + \beta^2\xi b_{028} + \beta^3b_{026} + a_3)b^2 + (-a_1b_2 - a_2b_1)b + a_1b_1^2) + O(\epsilon^4),
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{d\beta}{d\theta} &= \epsilon G_{12}(\theta, \alpha, \beta, \xi) + \epsilon^2 G_{22}(\theta, \alpha, \beta, \xi) + \epsilon^3 G_{32}(\theta, \alpha, \beta, \xi) + O(\epsilon^4), \\
&= \frac{c_1\beta}{b}\epsilon + \frac{(bc_2 - b_1c_1)\beta}{b^2}\epsilon^2 + \\
&\quad \frac{\epsilon^3}{b^3}(b^2\alpha^4(c_{00} - c_{04} + c_{020})\cos(\theta)^4 + \alpha^3b^2(\alpha(c_{01} - c_{010})\sin(\theta) + (c_{02} - c_{013})\beta + \xi(c_{03} - c_{014} \\
&\quad))\cos(\theta)^3 + (\alpha((c_{07} - c_{021})\beta + \xi(c_{08} - c_{022}))\sin(\theta) + (c_{04} - 2c_{020})\alpha^2 + (c_{05} - c_{023})\beta^2 + \xi \\
&\quad (c_{09} - c_{025})\beta + \xi^2(c_{06} - c_{024}))\alpha^2b^2\cos(\theta)^2 + (\alpha(\beta^2c_{015} + \beta\xi c_{019} + \alpha^2c_{010} + \xi^2c_{017})\sin(\theta) \\
&\quad + (\beta c_{013} + \xi c_{014})\alpha^2 + \xi^3c_{012} + \xi^2c_{018}\beta + \xi c_{016}\beta^2 + c_{011}\beta^3)\alpha b^2\cos(\theta) + \alpha((\beta c_{021} + \xi c_{022})\alpha^2 \\
&\quad + \xi^3c_{027} + \xi^2c_{029}\beta + \xi c_{028}\beta^2 + c_{026}\beta^3)b^2\sin(\theta) + (\alpha^4c_{020} + (\beta^2c_{023} + \beta\xi c_{025} + \xi^2c_{024})\alpha^2 + \\
&\quad \beta^4c_{030} + \beta^3\xi c_{031} + \beta^2\xi^2c_{032} + (\xi^3c_{033} + c_3)\beta + \xi^4c_{034})b^2 - \beta(b_1c_2 + b_2c_1)b + \beta b_1^2c_1) + O(\epsilon^4),
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{d\xi}{d\theta} &= \epsilon G_{13}(\theta, \alpha, \beta, \xi) + \epsilon^2 G_{23}(\theta, \alpha, \beta, \xi) + \epsilon^3 G_{33}(\theta, \alpha, \beta, \xi) + O(\epsilon^4). \\
&= \frac{d_1\xi}{b}\epsilon + \frac{(bd_2 - b_1d_1)\xi}{b^2}\epsilon^2 + \\
&\quad \frac{\epsilon^3}{b^3}(b^2\alpha^4(d_{00} - d_{04} + d_{020})\cos(\theta)^4 + \alpha^3b^2(\alpha(d_{01} - d_{010})\sin(\theta) + \xi(d_{03} - d_{014}) + \beta(d_{02} - \\
&\quad d_{013}))\cos(\theta)^3 + (\alpha(\xi(d_{08} - d_{022}) + \beta(d_{07} - d_{021}))\sin(\theta) + (d_{04} - 2d_{020})\alpha^2 + \xi^2(d_{06} - d_{024}) \\
&\quad + \beta(d_{09} - d_{025})\xi + \beta^2(d_{05} - d_{023}))\alpha^2b^2\cos(\theta)^2 + (\alpha(\beta^2d_{015} + \beta\xi d_{019} + \alpha^2d_{010} + \xi^2d_{017}) \\
&\quad \sin(\theta) + (\beta d_{013} + \xi d_{014})\alpha^2 + \xi^3d_{012} + d_{018}\beta\xi^2 + d_{016}\beta^2\xi + d_{011}\beta^3)\alpha b^2\cos(\theta) + (\beta d_{021} + \xi \\
&\quad d_{022})\alpha^2 + \xi^3d_{027} + \beta d_{029}\xi^2 + \beta^2d_{028}\xi + \beta^3d_{026})b^2\sin(\theta) + (\alpha^4d_{020} + (\beta^2d_{023} + \beta\xi d_{025} + \xi^2 \\
&\quad d_{024})\alpha^2 + \xi^4d_{034} + \beta\xi^3d_{033} + \beta^2\xi^2d_{032} + (\beta^3d_{031} + d_3)\xi + \beta^4d_{030})b^2 - \xi(b_1d_2 + b_2d_1)b + \\
&\quad \xi b_1^2d_1) + O(\epsilon^4).
\end{aligned}$$