

Table des matières

| | |
|---|----|
| Avant-propos | 19 |
| Introduction | 23 |
| Chapitre 1. Corps solides déformables | 27 |
| 1.1. Introduction | 27 |
| 1.2. Equilibre d'un milieu continu | 28 |
| 1.2.1. Déformations | 28 |
| 1.2.2. Contraintes | 32 |
| 1.2.3. Bilan équilibré des efforts | 35 |
| 1.2.4. Loi de comportement élastique linéaire..... | 37 |
| 1.2.5. Equations vibratoires (équations de Navier) | 38 |
| 1.3. Formulation du principe de Hamilton | 39 |
| 1.3.1. Aspects généraux du formalisme | 39 |
| 1.3.2. Application à un milieu continu tridimensionnel..... | 40 |
| 1.3.2.1. Principe de Hamilton..... | 40 |
| 1.3.2.2. Espace vectoriel fonctionnel de Hilbert..... | 40 |
| 1.3.2.3. Variation de l'énergie cinétique | 41 |
| 1.3.2.4. Variation de l'énergie de déformation | 41 |
| 1.3.2.5. Variation du travail des forces externes | 42 |
| 1.3.2.6. Equations d'équilibre et conditions aux limites..... | 42 |
| 1.3.2.7. Tenseur des contraintes et multiplicateurs de Lagrange | 43 |
| 1.3.2.8. Variation de l'énergie de déformation élastique..... | 45 |
| 1.3.2.9. Equations des petits mouvements élastiques..... | 46 |
| 1.3.2.10. Principe de conservation de l'énergie mécanique..... | 48 |
| 1.3.2.11. Unicité de la solution | 49 |
| 1.4. Ondes élastiques dans un milieu continu tridimensionnel | 51 |
| 1.4.1. Nature ondulatoire des oscillations d'un milieu continu..... | 51 |
| 1.4.2. Solutions harmoniques des équations de Navier | 52 |
| 1.4.3. Ondes de dilatation et ondes de cisaillement élastique | 52 |

| | |
|--|-----------|
| 1.4.3.1. Ondes irrotationnelles (ondes de dilatation) | 53 |
| 1.4.3.2. Ondes équivolumiques (ondes de cisaillement) | 55 |
| 1.4.4. Vitesse de phase et vitesse de groupe des ondes | 55 |
| 1.4.5. Ondes stationnaires et modes propres vibratoires | 57 |
| 1.4.5.1. Modes en ondes longitudinales planes | 58 |
| 1.4.5.2. Modes tridimensionnels en ondes de dilatation | 59 |
| 1.4.5.3. Modes en ondes planes de cisaillement | 62 |
| 1.4.6. Réflexion des ondes à la frontière d'un milieu semi-infini | 63 |
| 1.5. Passage du corps solide aux structures | 64 |
| 1.5.1. Principe de Barré de Saint-Venant | 64 |
| 1.5.2. Réduction de la dimension du milieu continu | 66 |
| 1.5.2.1. Compression d'un parallélépipède rectangle | 66 |
| 1.5.2.2. Cisaillement d'un parallélépipède rectangle | 67 |
| 1.5.2.3. Validité du modèle simplifié en dynamique | 68 |
| 1.5.2.4. Structures de base de la mécanique de l'ingénieur | 69 |
| Chapitre 2. Modélisation des poutres droites : grandeurs locales et globales et équations d'équilibre | 71 |
| 2.1. Réduction d'un milieu continu 3D en un milieu 1D équivalent | 71 |
| 2.1.1. Géométrie générique des structures de type poutre | 71 |
| 2.1.2. Déplacements globaux et locaux | 72 |
| 2.1.3. Déformations locales et globales | 73 |
| 2.1.4. Contraintes locales et globales | 76 |
| 2.1.5. Expression des contraintes élastiques | 78 |
| 2.1.6. Bilan équilibré des efforts | 79 |
| 2.1.6.1. Equilibre des forces | 79 |
| 2.1.6.2. Equilibre des moments | 80 |
| 2.2. Equations d'équilibre en élasticité linéaire | 82 |
| 2.2.1. Poutre en traction-contraction | 82 |
| 2.2.1.1. Equation d'équilibre local | 82 |
| 2.2.1.2. Solution générale de l'équation statique sans second membre ... | 83 |
| 2.2.1.3. Conditions aux limites de type élastique | 83 |
| 2.2.1.4. Chargements localisés | 86 |
| 2.2.1.5. Appuis intermédiaires | 88 |
| 2.2.2. Poutre en cisaillement sans flexion | 90 |
| 2.2.2.1. Equation d'équilibre local | 91 |
| 2.2.2.2. Solution générale de l'équation statique sans second membre ... | 91 |
| 2.2.2.3. Conditions aux limites de type élastique | 91 |
| 2.2.2.4. Chargements localisés | 92 |
| 2.2.2.5. Appuis intermédiaires | 92 |
| 2.2.3. Poutre en torsion | 92 |
| 2.2.3.1. Modèle de torsion sans gauchissement | 92 |
| 2.2.3.2. Equation d'équilibre local | 93 |
| 2.2.3.3. Solution générale de l'équation statique sans second membre ... | 93 |

| | |
|---|------------|
| 2.2.3.4. Conditions aux limites de type élastique | 93 |
| 2.2.3.5. Chargements localisés..... | 93 |
| 2.2.3.6. Appuis intermédiaires | 94 |
| 2.2.3.7. Modèle de torsion avec gauchissement (modèle de Saint-Venant) | 94 |
| 2.2.4. Poutre en flexion sans cisaillement | 99 |
| 2.2.4.1. Hypothèses simplificatrices du modèle | 99 |
| 2.2.4.2. Conditions aux limites de type élastique | 102 |
| 2.2.4.3. Appuis intermédiaires | 103 |
| 2.2.4.4. Chargements localisés..... | 104 |
| 2.2.4.5. Solution générale de l'équation statique sans second membre... .. | 104 |
| 2.2.4.6. Application à quelques problèmes statiques | 104 |
| 2.2.5. Formulation des conditions aux limites..... | 111 |
| 2.2.5.1. Impédances élastiques..... | 111 |
| 2.2.5.2. Conditions homogènes et inhomogènes..... | 111 |
| 2.3. Comportement thermoélastique d'une poutre droite..... | 111 |
| 2.3.1. Poutre en traction-contraction thermoélastique | 112 |
| 2.3.2. Poutre en flexion thermoélastique | 114 |
| 2.4. Comportement élastoplastique global d'une poutre droite..... | 116 |
| 2.4.1. Comportement élastoplastique en traction uniforme..... | 117 |
| 2.4.2. Comportement élastoplastique en flexion | 118 |
| 2.4.2.1. Contrainte de peau..... | 118 |
| 2.4.2.2. Loi moment courbure et charge de ruine..... | 119 |
| 2.4.2.3. Loi globale de comportement élastoplastique en flexion | 121 |
| 2.4.2.4. chargements qui couplent plusieurs modes de déformation | 122 |
| Chapitre 3. Formulation variationnelle appliquée aux poutres droites | 125 |
| 3.1. Introduction | 125 |
| 3.2. Formulation variationnelle des équations des poutres droites..... | 126 |
| 3.2.1. Poutre en traction-contraction | 126 |
| 3.2.1.1. Modèle sans effet de Poisson..... | 126 |
| 3.2.1.2. Modèle avec effet de Poisson, dit de Love Rayleigh | 127 |
| 3.2.2. Poutre en flexion..... | 128 |
| 3.2.2.1. Modèle sans cisaillement, dit de Bernoulli-Euler | 128 |
| 3.2.2.2. Modèle avec cisaillement, dit de Timoshenko | 130 |
| 3.2.2.3. Modèle de Rayleigh-Timoshenko..... | 134 |
| 3.2.3. Poutre élastique en flexion, précontrainte axialement..... | 135 |
| 3.2.3.1. Energie potentielle et lagrangien..... | 136 |
| 3.2.3.2. Equation d'équilibre axial et ses conditions aux limites | 138 |
| 3.2.3.3. Equation d'équilibre transverse et ses conditions aux limites... .. | 138 |
| 3.2.3.4. Ecriture directe du bilan d'efforts | 139 |
| 3.3. Formulation en intégrales pondérées..... | 140 |
| 3.3.1. Motivation | 140 |
| 3.3.2. Equations pondérées du mouvement | 141 |

| | |
|--|------------|
| 3.3.3. Efforts localisés formulés en termes de distributions | 142 |
| 3.3.3.1. Chargements externes | 143 |
| 3.3.3.2. Appuis intermédiaires | 146 |
| 3.3.3.3. Conclusion sur l'utilisation des distributions | 146 |
| 3.3.4. Opérateurs adjoints et auto-adjoints | 148 |
| 3.3.5. Propriétés génériques des opérateurs conservatifs | 150 |
| 3.4. Discrétisation en éléments finis | 151 |
| 3.4.1. Considérations générales | 151 |
| 3.4.2. Discrétisation d'une poutre en traction/contraction | 154 |
| 3.4.2.1. Maillage | 155 |
| 3.4.2.2. Fonctions de forme et déplacements nodaux | 155 |
| 3.4.2.3. Matrice élémentaire de masse et de raideur | 155 |
| 3.4.2.4. Discrétisation du chargement | 157 |
| 3.4.2.5. Assemblage | 158 |
| 3.4.2.6. Conditions aux limites | 158 |
| 3.4.2.7. Appuis élastiques | 159 |
| 3.4.3. Assemblage de deux poutres non coaxiales | 160 |
| 3.4.3.1. Matrice élémentaire de raideur en flexion | 160 |
| 3.4.3.2. Matrice élémentaire de raideur en flexion et en traction-contraction | 161 |
| 3.4.3.3. Assemblage de deux éléments de poutre non coaxiale | 162 |
| 3.4.4. Modélisation d'une structure et degrés de liberté | 163 |
| Chapitre 4. Modes propres des poutres et discrétisation sur bases modales. | 165 |
| 4.1. Introduction | 165 |
| 4.2. Modes propres vibratoires des poutres droites | 166 |
| 4.2.1. Modèles simplifiés et ondes dispersives | 166 |
| 4.2.1.1. Ondes de dilatation | 167 |
| 4.2.1.2. Ondes de flexion | 169 |
| 4.2.2. Modes propres vibratoires | 171 |
| 4.2.2.1. Modes de traction-contraction | 171 |
| 4.2.2.2. Modes de torsion | 174 |
| 4.2.2.3. Modes de flexion | 175 |
| 4.2.2.4. Modes couplés en flexion-cisaillement | 178 |
| 4.2.3. Approximation de Rayleigh-Ritz | 180 |
| 4.2.3.1. Poutre en flexion avec une masse ponctuelle | 181 |
| 4.2.3.2. Poutre sur fondations élastiques | 182 |
| 4.2.4. Poutre en flexion, avec précontrainte axiale | 183 |
| 4.2.4.1. Modes propres vibratoires | 183 |
| 4.2.4.2. Analyse statique du flambage | 185 |
| 4.3. Méthodes d'analyse par projection sur base modale | 188 |
| 4.3.1. Equations du mouvement sur base modale | 188 |
| 4.3.2. Excitations déterministes | 189 |
| 4.3.2.1. Excitations à variables séparées en temps et en espace | 189 |

| | |
|--|------------|
| 4.3.2.2. Excitations à variables spatio-temporelles non séparées | 190 |
| 4.3.3. Critères de troncature de la base modale | 191 |
| 4.3.3.1. Critères de formes spatiales | 191 |
| 4.3.3.2. Critères spectraux | 193 |
| 4.3.4. Contraintes et taux de convergence des séries modales | 197 |
| 4.4. Liaisons et sous-structuration par synthèse modale. | 200 |
| 4.4.1. Liaisons par raideur (impédances élastiques) | 200 |
| 4.4.1.1. Poutre en traction-contraction liée à un ressort | 201 |
| 4.4.1.2. Raideur de troncature dans le cas d'une base libre libre | 204 |
| 4.4.1.3. Modes propres en flexion d'une poutre précontrainte axialement | 206 |
| 4.4.2. Liaisons par inertie (impédances inertielles) | 208 |
| 4.4.2.1. Modes propres d'une poutre qui supporte un volant d'inertie | 208 |
| 4.4.3. Sous-structuration sur bases modales. | 210 |
| 4.4.3.1. Principe de base de la sous-structuration | 210 |
| 4.4.3.2. Modes propres de deux poutres en flexion, liées par un ressort. | 212 |
| 4.4.4. Liaisons non linéaires | 214 |
| | |
| Chapitre 5. Structures de type plaques : modélisation des mouvements membranaires | 223 |
| 5.1. Introduction | 223 |
| 5.1.1. Géométrie des plaques | 223 |
| 5.1.2. Plaques et membranes | 224 |
| 5.2. Modèle de Kirchhoff-Love | 225 |
| 5.2.1. Hypothèses simplificatrices du modèle de Kirchhoff-Love | 225 |
| 5.2.2. Degrés de liberté et champ des déplacements globaux | 226 |
| 5.2.3. Déplacements, déformations et contraintes membranaires. | 227 |
| 5.2.3.1. Champ des déplacement locaux et globaux. | 227 |
| 5.2.3.2. Déformations | 228 |
| 5.2.3.3. Contraintes membranaires | 229 |
| 5.3. Equilibre membranaire des plaques rectangulaires | 230 |
| 5.3.1. Equations en termes de contraintes | 230 |
| 5.3.1.1. Application du principe de Hamilton | 230 |
| 5.3.1.2. Equations d'équilibre dynamique local | 232 |
| 5.3.1.3. Chargements localisés. | 233 |
| 5.3.1.4. Conditions aux limites | 234 |
| 5.3.2. Loi de comportement élastique | 236 |
| 5.3.3. Equations vibratoires et conditions aux limites | 237 |
| 5.3.4. Discussion de quelques problèmes statiques. | 239 |
| 5.3.4.1. Plaque en contrainte uniaxiale | 239 |
| 5.3.4.2. Plaque sur appui bloqué | 241 |
| 5.3.4.3. Plaque en déformation uniaxiale | 242 |
| 5.3.4.4. Plaque tendue de façon uniforme | 242 |
| 5.3.4.5. Plaque en cisaillement uniforme dans son plan | 243 |

| | |
|---|------------|
| 5.3.4.6. Plaque rectangulaire en flexion-cisaillement dans son plan | 244 |
| 5.3.5. Discussion de quelques problèmes thermoélastiques | 247 |
| 5.3.5.1. Comportement thermoélastique | 247 |
| 5.3.5.2. Exemple de calcul de contraintes thermiques | 248 |
| 5.3.5.3. Contraintes thermiques avec joints de dilatation | 249 |
| 5.3.5.4. Dilatation uniaxiale d'une plaque | 251 |
| 5.3.6. Modes propres vibratoires en membrane | 253 |
| 5.3.6.1. Solutions générales à variables séparées des équations modales . | 253 |
| 5.3.6.2. Modes propres d'une plaque dont toutes les lisières sont glissantes | 254 |
| 5.3.6.3. Plaque sous charge ponctuelle : atténuation des effets locaux . . . | 258 |
| 5.4. Formulation en coordonnées curvilignes | 263 |
| 5.4.1. Tenseur des petites déformations | 263 |
| 5.4.2. Equations d'équilibre et conditions aux limites | 264 |
| 5.4.3. Loi de comportement élastique | 266 |
| 5.4.4. Application : cylindre circulaire sous pression | 266 |
| | |
| Chapitre 6. Structures de type plaques : modélisation des mouvements transverses | 271 |
| 6.1. Cinématique du modèle de Kirchhoff-Love | 271 |
| 6.1.1. Champ de déplacement local d'un point matériel | 271 |
| 6.1.2. Déformations locales et globales | 272 |
| 6.1.2.1. Déformations locales | 272 |
| 6.1.2.2. Déformations globales en flexion et en torsion | 272 |
| 6.1.3. Contraintes globales de flexion et de torsion | 273 |
| 6.2. Equations des mouvements transverses | 276 |
| 6.2.1. Formulation en termes de contraintes | 276 |
| 6.2.1.1. Variation de l'action du terme inertiel | 276 |
| 6.2.1.2. Variation de l'action du terme de déformation | 276 |
| 6.2.1.3. Equation d'équilibre local en absence de chargement | 278 |
| 6.2.2. Conditions aux limites | 279 |
| 6.2.2.1. Efforts tranchants effectifs de Kirchhoff et forces de coin | 279 |
| 6.2.2.2. Conditions aux limites élastiques | 282 |
| 6.2.2.3. Chargement de frontières et conditions aux limites inhomogènes | 283 |
| 6.2.3. Chargements surfaciques et localisés sur la plaque | 285 |
| 6.2.3.1. Chargements répartis sur toute la plaque | 285 |
| 6.2.3.2. Chargement linéique localisé sur une droite parallèle à une frontière | 286 |
| 6.2.3.3. Chargements ponctuels | 287 |
| 6.2.4. Petits mouvements élastiques | 288 |
| 6.2.4.1. Contraintes globales | 288 |
| 6.2.4.2. Equations vibratoires | 289 |
| 6.2.4.3. Conditions aux limites | 289 |
| 6.2.5. Discussion de quelques problèmes statiques | 291 |

| | |
|---|------------|
| 6.2.5.1. Flexion d'une plaque induite par des moments en lisières | 291 |
| 6.2.5.2. Torsion par des forces de coin | 294 |
| 6.3. Analyse modale | 295 |
| 6.3.1. Modes propres vibratoires | 295 |
| 6.3.1.1. Equations vibratoires avec précontrainte membranaire | 295 |
| 6.3.1.2. Modes propres vibratoires et charge critique de flambage | 298 |
| 6.3.1.3. Densité modale et réponses résonantes d'une plaque | 301 |
| 6.4. Formulation en coordonnées curvilignes | 304 |
| 6.4.1. Déplacements et déformations en flexion et en torsion | 304 |
| 6.4.2. Equations vibratoires | 304 |
| 6.4.3. Conditions aux limites | 305 |
| 6.4.4. Exemple : plaque circulaire chargée par une pression uniforme | 306 |
| Chapitre 7. Arches et coques : équilibre membranaire | 311 |
| 7.1. Introduction : intérêt des structures courbes | 311 |
| 7.1.1. Tenue mécanique d'une poutre droite | 311 |
| 7.1.2. Reprise des efforts transverses dans une structure courbe | 312 |
| 7.2. Arches et anneaux circulaires | 314 |
| 7.2.1. Géométrie et tenseur de la métrique curviligne | 314 |
| 7.2.2. Champs des déplacements locaux et globaux | 315 |
| 7.2.3. Petites déformations locales et globales | 315 |
| 7.2.4. Equations d'équilibre filaire | 317 |
| 7.2.5. Anneau circulaire | 319 |
| 7.2.5.1. Simplification inhérente aux structures de révolution | 319 |
| 7.2.5.2. Mode propre de respiration d'un anneau circulaire | 320 |
| 7.2.5.3. Modes propres de translation dans le plan | 321 |
| 7.2.5.4. Câble sous poids propre | 321 |
| 7.3. Coques | 322 |
| 7.3.1. Géométrie et tenseur de la métrique curviligne | 322 |
| 7.3.2. Champs des déplacements locaux et globaux | 324 |
| 7.3.3. Petites déformations locales et globales | 325 |
| 7.3.4. Contraintes membranaires globales | 325 |
| 7.3.5. Equations d'équilibre membranaire | 326 |
| 7.3.6. Coques de révolution | 327 |
| 7.3.6.1. Géométrie et tenseur métrique | 327 |
| 7.3.6.2 Tenseur de courbure | 328 |
| 7.3.7. Application à quelques problèmes statiques | 330 |
| 7.3.7.1. Coque sphérique sous pression interne | 330 |
| 7.3.7.2. Coque cylindrique close par des hémisphères | 332 |
| 7.3.7.3. Coque torique sous pression interne : méthode de Ritz-Galerkin | 334 |
| 7.3.7.4. Calotte sphérique chargée par son propre poids | 338 |
| 7.3.7.5. Tronc de cône chargé par son poids propre | 344 |
| 7.3.7.6. Récipient conique chargé de liquide | 346 |

| | |
|---|-----|
| Chapitre 8. Arches et coques en flexion et en torsion | 349 |
| 8.1. Arches et anneaux circulaires | 349 |
| 8.1.1. Déplacements locaux et globaux | 349 |
| 8.1.2. Tenseur des petites déformations locales | 350 |
| 8.1.3. Modèle de flexion pure dans le plan de l'arche | 351 |
| 8.1.3.1. Equations d'équilibre | 351 |
| 8.1.3.2. Modes propres vibratoires d'un anneau circulaire | 354 |
| 8.1.4. Modèle couplé en flexion-traction dans le plan | 355 |
| 8.1.4.1. Equations d'équilibre | 355 |
| 8.1.4.2. Modes propres vibratoires d'un anneau circulaire | 358 |
| 8.1.4.3. Arche sous poids propre | 359 |
| 8.1.5. Modèle couplé en flexion-torsion hors plan | 363 |
| 8.1.5.1. Equations d'équilibre | 363 |
| 8.1.5.2. modes propres vibratoires d'un anneau circulaire | 367 |
| 8.2. Coques minces | 368 |
| 8.2.1. Tenseur des petites déformations locales et globales | 368 |
| 8.2.1.1. Champ de déplacement local | 369 |
| 8.2.1.2. Tenseur des petites déformations locales et globales | 369 |
| 8.2.2. Equations d'équilibre, dites de Love | 371 |
| 8.3. Coques en cylindre de révolution | 372 |
| 8.3.1. Equations d'équilibre | 372 |
| 8.3.1.1. Equations de Love | 372 |
| 8.3.1.2. Conditions aux limites | 374 |
| 8.3.2. Petits mouvements élastiques | 375 |
| 8.3.2.1. Déformations et contraintes élastiques | 375 |
| 8.3.2.2. Equations vibratoires | 376 |
| 8.3.2.3. Modèle de flexion pure | 377 |
| 8.3.2.4. Etranglement d'un cylindre | 379 |
| 8.3.2.5. Flexion autour des génératrices | 382 |
| 8.3.2.6. Modes propres vibratoires de respiration ($n = 0$) | 384 |
| 8.3.3. Flexion couplée en z et θ | 387 |
| 8.3.3.1. Modélisation simplifiée en termes du seul déplacement radial .. | 387 |
| 8.3.3.2. Energies élastiques en membrane, en flexion et en torsion | 387 |
| 8.3.3.3. Poinçonnement d'une coque cylindrique | 390 |
| 8.3.3.4. Modes propres vibratoires | 392 |
| 8.3.4. Modes propres vibratoires avec couplage de tous les déplacements ... | 393 |
| 8.3.4.1. Résolution approchée par la méthode de Galerkin | 393 |
| 8.3.4.2. Modes propres vibratoires d'un cylindre sur appuis simples | 393 |
| 8.3.5. Réponse à une charge axiale : aspects globaux et locaux | 396 |

| | |
|--|-----|
| Annexes | 399 |
| A1. Opérateurs différentiels et outils d'analyse vectorielle | 399 |
| A2. Opérateurs en coordonnées curvilignes orthonormées | 400 |
| A3. Flexion d'une plaque en coordonnées curvilignes | 406 |
| A4. Equilibre statique d'un câble sous poids propre | 411 |
| A5. Propriétés mécaniques de quelques solides | 416 |
| Bibliographie | 419 |
| Index | 423 |