

# Table des Matières

Avant-propos	i
<b>1 Principes de la Mécanique</b>	<b>1</b>
1.1 Mouvement mécanique . . . . .	1
1.2 Représentations mathématiques . . . . .	4
1.3 Lois intégrales et lois différentielles . . . . .	5
1.4 Lois fondamentales du mouvement . . . . .	5
1.4.1 Force ; Première loi de Newton . . . . .	5
1.4.2 Seconde loi de Newton . . . . .	6
1.4.3 Troisième loi de Newton . . . . .	7
1.4.4 Principe de relativité de Galilée . . . . .	7
1.5 La mécanique analytique . . . . .	8
1.6 Conceptions de la mécanique classique . . . . .	10
1.6.1 Les grandeurs physiques et leurs continuités . . . . .	10
1.6.2 Déterminisme Laplacien . . . . .	10
1.6.3 Méthode Analytique . . . . .	11
1.7 Au delà de la mécanique classique . . . . .	11
<b>2 Mécanique du Point Matériel</b>	<b>13</b>
2.1 Cinématique du point matériel . . . . .	13
2.1.1 Trajectoire, vitesse et accélération . . . . .	13
2.1.2 Mouvement curviligne . . . . .	14
2.2 Dynamique du point matériel . . . . .	18
2.3 Dynamique d'une masse variable . . . . .	20
2.4 Principes et théorèmes de base . . . . .	21
2.4.1 Moment et couple . . . . .	21
2.4.2 Travail et théorème des forces vives . . . . .	21
2.4.3 Energie mécanique ou intégrale des forces vives . . . . .	22
2.5 Mouvement lié . . . . .	24
2.5.1 Mouvement sur une surface . . . . .	24
2.5.2 Mouvement sur une ligne . . . . .	28
2.6 Positions d'équilibre stables et instables . . . . .	29
2.7 Intégration des équations du mouvement . . . . .	30
2.7.1 Lois du mouvement . . . . .	30
2.7.2 Diagrammes de potentiels . . . . .	31
2.7.3 Théorie des perturbations . . . . .	32
2.8 Transformations du mouvement . . . . .	34
2.8.1 Mouvement absolu, relatif et d'entraînement . . . . .	34

2.8.2	Mouvement dans un repère mobile . . . . .	37
2.8.3	Théorème des forces vives pour le mouvement relatif . . . . .	38
2.8.4	Chute d'un point matériel sur la terre . . . . .	38
2.8.5	Le pendule de Foucault . . . . .	40
<b>3</b>	<b>Mécanique des Systèmes</b> . . . . .	<b>43</b>
3.1	Mouvements simples d'un solide . . . . .	43
3.2	Distribution des vitesses dans un solide en mouvement . . . . .	45
3.3	Forces extérieures, intérieures, actives et de réaction . . . . .	46
3.4	Dynamique des systèmes . . . . .	47
3.4.1	Centre de masse; Mouvement du centre de masse . . . . .	47
3.4.2	Mouvement par rapport au centre de masse . . . . .	49
3.4.3	Moment angulaire . . . . .	49
3.4.4	Loi fondamentale de la dynamique du mouvement de rotation . . . . .	49
3.4.5	Théorème des forces vives; Conservation de l'énergie mécanique . . . . .	50
3.5	Mouvement d'un système lié . . . . .	51
3.6	Solides indéformables . . . . .	53
3.6.1	Moment d'inertie et rayon de giration . . . . .	53
3.6.2	Théorème des axes perpendiculaires . . . . .	54
3.6.3	Théorème de Huygens . . . . .	55
3.6.4	Produits d'inertie et ellipsoïde d'inertie . . . . .	56
3.6.5	Moment angulaire du solide . . . . .	57
3.6.6	Energie cinétique de rotation du solide . . . . .	58
3.6.7	Axes principaux d'inertie . . . . .	59
3.7	Les angles d'Euler . . . . .	61
3.8	Les équations dynamiques d'Euler . . . . .	64
3.9	Toupie symétrique en l'absence de force extérieure . . . . .	65
3.10	Mouvement d'Euler . . . . .	67
3.10.1	Interprétation de Poinsot . . . . .	68
3.10.2	Intégration des équations du mouvement . . . . .	70
<b>4</b>	<b>Champ Central et Mécanique Céleste</b> . . . . .	<b>75</b>
4.1	Problème à $N$ corps . . . . .	76
4.1.1	$N = 2$ . . . . .	76
4.1.2	$N > 2$ . . . . .	77
4.2	Champ et potentiel gravitationnels . . . . .	78
4.2.1	Théorème de Gauss . . . . .	80
4.2.2	Les équations de Poisson et de Laplace . . . . .	82
4.2.3	Calcul du champ gravitationnel créé par une distribution de masses . . . . .	82
4.2.4	Champ gravitationnel créé par une sphère homogène . . . . .	82
4.2.5	Méthode de résolution de l'équation de Laplace . . . . .	85
4.2.6	Energie potentielle d'une distribution de masse . . . . .	94
4.3	Mouvement dans un champ central . . . . .	96
4.3.1	Loi des aires . . . . .	96
4.3.2	Potentiel effectif . . . . .	97
4.3.3	Condition de stabilité . . . . .	98
4.3.4	Trajectoire dans un champ central . . . . .	98
4.4	Problème de Kepler . . . . .	100
4.4.1	Champ de gravitation newtonien . . . . .	100
4.4.2	Perturbation du mouvement des planètes . . . . .	104

4.4.3	Champ répulsif . . . . .	106
4.5	Vecteur de Laplace-Runge-Lenz . . . . .	107
4.6	Théorème de Bertrand sur les orbites fermées . . . . .	108
4.7	Problème de diffusion élastique des particules . . . . .	109
<b>5</b>	<b>Mécanique d'Euler-Lagrange</b> . . . . .	<b>113</b>
5.1	Liaisons mécaniques ; Degrés de Libertés . . . . .	113
5.1.1	Types de liaisons . . . . .	114
5.1.2	Méthode de Lagrange de définition des liaisons . . . . .	115
5.1.3	Extension aux systèmes non-holonômes . . . . .	115
5.2	Espace de configuration du système lié . . . . .	116
5.2.1	Interprétation géométrique . . . . .	117
5.2.2	Extension en vitesses . . . . .	117
5.3	Déplacements virtuels . . . . .	119
5.3.1	Liaisons parfaites et principe des déplacements virtuels . . . . .	119
5.3.2	Méthode de résolution . . . . .	120
5.3.3	Equations d'équilibre avec multiplicateurs . . . . .	121
5.4	Principe d'Euler-Lagrange . . . . .	125
5.4.1	Principe de d'Alembert . . . . .	125
5.4.2	Equation générale de la dynamique . . . . .	126
5.4.3	Equations de la dynamique avec multiplicateurs . . . . .	126
5.5	Equations d'Euler-Lagrange . . . . .	129
5.5.1	Forces généralisées ; Systèmes holonômes . . . . .	129
5.5.2	Conditions d'équilibre en coordonnées généralisées . . . . .	131
5.5.3	Dérivation des équations d'Euler-Lagrange . . . . .	132
5.5.4	Extension aux systèmes non-holonômes . . . . .	134
5.5.5	Méthode de résolution . . . . .	135
5.6	Mouvement dans un champ électromagnétique . . . . .	138
5.7	Fonction dissipative de Rayleigh . . . . .	141
5.8	Vibrations Mécaniques . . . . .	142
5.8.1	Stabilité d'un système au voisinage d'une position d'équilibre . . . . .	142
5.8.2	Stabilité au voisinage d'un état stationnaire . . . . .	144
5.8.3	Système à un seul degré de liberté . . . . .	144
5.8.4	Système à plusieurs degrés de liberté . . . . .	149
<b>6</b>	<b>Principe Variationnel</b> . . . . .	<b>153</b>
6.1	Calcul des variations . . . . .	153
6.2	Exemples simples de calcul des variations . . . . .	156
6.2.1	Problème de Bernoulli . . . . .	156
6.2.2	Surface maximale (contraintes intégrales) . . . . .	157
6.3	Action d'Hamilton . . . . .	158
6.4	Propriétés de la fonction de Lagrange . . . . .	160
6.5	Relativité de Galilée . . . . .	162
6.5.1	Point matériel libre . . . . .	162
6.5.2	Système de points matériels et système non-fermé . . . . .	163
6.6	Principe de moindre temps . . . . .	164
6.7	Formulation lagrangienne de la relativité restreinte . . . . .	165
6.7.1	Les principes fondamentaux de la relativité restreinte . . . . .	166
6.7.2	Notion d'intervalle . . . . .	167
6.7.3	Transformation de Lorentz . . . . .	168

6.7.4	Quadrivecteur et produit scalaire . . . . .	170
6.7.5	Temps propre . . . . .	170
6.7.6	Transformation des vitesses . . . . .	170
6.7.7	Lagrangien relativiste . . . . .	171
6.8	Impulsions généralisées . . . . .	173
6.9	Mouvement dans un référentiel non-galiléen . . . . .	175
<b>7</b>	<b>Lois de symétrie et intégrales du mouvement</b>	<b>177</b>
7.1	Conservation de l'énergie . . . . .	177
7.2	Conservation de l'impulsion . . . . .	180
7.3	Conservation du moment angulaire . . . . .	182
7.4	Théorèmes de Noether . . . . .	184
7.4.1	Premier théorème de Noether . . . . .	186
7.4.2	Deuxième théorème de Noether . . . . .	187
7.4.3	Exemples . . . . .	187
<b>8</b>	<b>Mécanique d'Hamilton</b>	<b>191</b>
8.1	Transformation de Legendre . . . . .	191
8.1.1	Fonction à deux variables . . . . .	192
8.1.2	Fonction à $2n$ variables . . . . .	193
8.2	Hamiltonien; Equations d'Hamilton . . . . .	194
8.3	Forme symplectique des équations d'Hamilton . . . . .	197
8.4	Equations d'Hamilton par un principe variationnel . . . . .	198
8.5	Coordonnées cycliques et méthode de Lagrange . . . . .	200
8.6	Méthode de réduction de Routh . . . . .	202
8.7	Principe de Maupertuis . . . . .	204
<b>9</b>	<b>Transformations canoniques</b>	<b>209</b>
9.1	Transformations de coordonnées . . . . .	209
9.2	Equations de transformations canoniques . . . . .	210
9.2.1	Transformations du type I . . . . .	212
9.2.2	Transformations du type II . . . . .	213
9.2.3	Transformations du type III . . . . .	215
9.2.4	Transformations du type IV . . . . .	216
9.3	Propriétés des transformations canoniques . . . . .	217
9.4	Approche symplectique . . . . .	220
9.5	Quelques applications des transformations canoniques . . . . .	224
9.6	Temps comme une variable dynamique . . . . .	230
9.7	Fonction génératrice d'une rotation infinitésimale . . . . .	232
9.8	Transformations infinitésimales ou de contacts . . . . .	233
9.9	Rôle de la fonction d'action $S$ . . . . .	236
9.10	Théorème de Poincaré . . . . .	240
9.11	Théorème de Liouville . . . . .	241
9.12	Equation de Liouville: lien avec la physique statistique . . . . .	242
9.12.1	Densité d'état . . . . .	242
9.12.2	Equation de Liouville . . . . .	242
9.12.3	Equation de continuité dans l'espace . . . . .	244
9.13	Analogie entre la mécanique et l'optique . . . . .	245
9.13.1	Propagation des ondes électromagnétiques . . . . .	245
9.13.2	Mécaniques des ondes . . . . .	247

9.13.3	Au delà de la mécanique . . . . .	248
9.13.4	Equation de Schrödinger . . . . .	249
9.14	Perturbation des systèmes hamiltoniens . . . . .	250
9.14.1	Méthode de Lagrange . . . . .	250
9.14.2	Méthode de Poincaré . . . . .	253
9.14.3	Exemple : Problème à trois corps . . . . .	254
9.14.4	Méthode mixte . . . . .	258
<b>10</b>	<b>Systèmes à Grand Nombre de Particules</b> . . . . .	<b>259</b>
10.1	Distribution de Maxwell . . . . .	259
10.2	Fonction de distribution . . . . .	261
10.3	Distribution de Boltzmann . . . . .	261
10.4	Théorème du viriel . . . . .	263
10.5	Approximation du champ moyen . . . . .	265
10.6	Distribution de Gibbs . . . . .	265
10.6.1	Energie libre ; Intégrale des états . . . . .	267
10.6.2	Equation d'état . . . . .	267
10.6.3	Equation de Gibbs-Helmholtz . . . . .	268
10.6.4	Entropie et sens statistique . . . . .	268
10.6.5	Loi des gaz parfaits . . . . .	268
10.7	Théorème de l'équipartition de l'énergie cinétique . . . . .	269
10.8	Hiérarchie BBGKY . . . . .	271
10.8.1	Equations d'évolution . . . . .	272
10.8.2	Equation de Vlasov . . . . .	274
10.8.3	Equations locales de conservation de la masse . . . . .	274
<b>11</b>	<b>Crochets de Poisson et Invariants canoniques</b> . . . . .	<b>277</b>
11.1	Crochets de Poisson . . . . .	277
11.1.1	Définition . . . . .	277
11.1.2	Invariance des crochets de Poisson . . . . .	279
11.1.3	Propriétés des crochets de Poisson . . . . .	280
11.1.4	Crochet de Poisson de champs de vecteurs . . . . .	282
11.2	Equations du mouvement . . . . .	284
11.3	Structure de Poisson généralisée . . . . .	287
11.4	Propriétés des intégrales du mouvement . . . . .	288
11.5	Lien entre invariants et propriétés de symétrie . . . . .	290
11.6	Forces centrales et crochets de Poisson . . . . .	292
11.7	Crochets de Lagrange . . . . .	294
11.8	Invariants Intégraux de Poincaré . . . . .	296
11.9	Théorème d'Arnold-Liouville . . . . .	297
<b>12</b>	<b>Théorie d'Hamilton-Jacobi</b> . . . . .	<b>299</b>
12.1	Equation d'Hamilton-Jacobi . . . . .	299
12.1.1	Représentation en coordonnées . . . . .	299
12.1.2	Représentation en impulsions . . . . .	302
12.1.3	Exemples . . . . .	302
12.1.4	Problème inverse . . . . .	307
12.2	Les systèmes conservatifs et action de Maupertuis . . . . .	307
12.3	Séparation des variables dans l'équation d'Hamilton-Jacobi . . . . .	311
12.3.1	Définitions . . . . .	311

12.3.2	Quelques techniques de séparation des variables . . . . .	312
12.3.3	Théorème de Liouville . . . . .	314
12.3.4	Conditions de Staeckel . . . . .	314
12.3.5	Mouvement en coordonnées cartésiennes . . . . .	316
12.3.6	Mouvement en coordonnées polaires . . . . .	317
12.3.7	Mouvement en coordonnées sphériques . . . . .	320
12.3.8	Mouvement en coordonnées paraboliques . . . . .	323
12.3.9	Mouvement en coordonnées elliptiques . . . . .	325
12.3.10	Oscillateur harmonique avec une fréquence $\frac{\omega}{\hbar}$ . . . . .	327
12.3.11	Chaîne de Toda . . . . .	328
12.4	Variables canoniques angles-actions . . . . .	330
12.4.1	Variables action-angle dans les systèmes à seul degré de liberté . . . . .	330
12.4.2	Exemples . . . . .	333
12.4.3	Variables action-angle pour les systèmes séparables . . . . .	334
12.4.4	Mouvement quasi-périodique . . . . .	335
12.5	Problème de Kepler - Variables Action-Angle . . . . .	337
12.6	Quantification des variables d'action . . . . .	340
<b>13</b>	<b>Introduction aux milieux continus et champs</b> . . . . .	<b>341</b>
13.1	Exemple de passage d'un système discret vers un système continu: Vibration dans solide unidimensionnel . . . . .	341
13.2	Méthode de résolution des équations d'onde . . . . .	343
13.3	Formulation lagrangienne des milieux continus . . . . .	344
13.4	Equations d'Euler-Lagrange pour les champs . . . . .	344
13.5	Transformation de jauge . . . . .	347
13.6	Dérivées fonctionnelles . . . . .	347
13.7	Electrodynamique classique . . . . .	349
13.8	Tenseur impulsion-énergie d'un champ . . . . .	352
13.9	Fonctionnelle de Rayleigh . . . . .	354
13.10	Hamiltonien fonctionnelle . . . . .	356
13.11	Equations d'Hamilton fonctionnelles . . . . .	357
13.12	Crochets de Poisson . . . . .	359
	<b>Liste des figures</b> . . . . .	<b>361</b>
	<b>Bibliographie</b> . . . . .	<b>363</b>
	<b>Index</b> . . . . .	<b>365</b>