

Logique mathématique – Tome 2 Fonctions récursives, théorème de Gödel, théorie des ensembles

1. Fonctions récursives

- Rappels sur les entiers naturels et codage
- Fonctions récursives primitives
- Schémas de définition (composition, récursion primitive)
- Fonctions récursives générales (μ -récursives)
- Ensembles récursifs et récursivement énumérables
- Problèmes décidables et indécidables
- Fonction caractéristique et codage des calculs

2. Calculabilité et machines

- Modèles de calcul (machines de Turing)
- Équivalence des modèles de calcul
- Thèse de Church-Turing
- Problème de l'arrêt
- Réduction et indécidabilité
- Exemples de problèmes non calculables

3. Théorèmes d'incomplétude de Gödel

- Arithmétisation du langage
- Numérotation de Gödel
- Représentabilité des fonctions
- Construction des énoncés auto-référents
- Premier théorème d'incomplétude
- Second théorème d'incomplétude
- Conséquences mathématiques et logiques

4. Théorie axiomatique des ensembles

- Notion d'ensemble et axiomes
- Axiomes de Zermelo-Fraenkel (ZF)
- Axiome du choix (AC)
- Relations et fonctions
- Ordinaux et cardinaux
- Construction des entiers et des réels

5. Cardinaux et infini

- Équipotence et comparaisons de cardinalités

- Ensembles dénombrables et non dénombrables
- Théorème de Cantor
- Hypothèse du continu
- Arithmétique des cardinaux

6. Compléments et approfondissements

- Paradoxes en théorie des ensembles
- Modèles et indépendance
- Introduction à la théorie des modèles
- Exercices et problèmes