

# Table des matières

Table des matières	V
Table of contents	XV
Avant-propos	I

## Première partie

<b>I</b>	<b>Rappel des notions fondamentales de mécanique</b>	<b>3</b>
I.1	Cinématique : description analytique d'un système en mouvement . . . . .	4
I.1.1	Définition du mouvement . . . . .	4
I.1.2	Trajectoires. Lignes d'émission. Champ de vitesses. Lignes de courant . . . . .	7
I.1.3	Description lagrangienne . . . . .	9
I.1.4	Description eulérienne . . . . .	10
I.1.5	Mouvement d'un corps rigide. Distributeur des vitesses . . . . .	12
I.1.6	Changement de référentiel . . . . .	15
I.1.7	Première notion de dérivée particulière . . . . .	15
I.2	Premières notions de cinétique . . . . .	16
I.2.1	Définition de la masse . . . . .	16
I.2.2	Conservation de la masse . . . . .	17
I.2.3	Énergie cinétique . . . . .	17
I.3	Définition des efforts extérieurs . . . . .	18
I.3.1	Définition par un champ de forces . . . . .	18
I.3.2	Définition par les puissances virtuelles . . . . .	18
I.4	Les énoncés fondamentaux de la dynamique . . . . .	23
I.4.1	Loi fondamentale de la dynamique . . . . .	24
I.4.2	Principe des puissances virtuelles . . . . .	26
I.5	Lois de comportement des liaisons imposées à un système déformable de corps rigides . . . . .	28
I.6	Conclusion et objet des chapitres suivants . . . . .	29
<b>II</b>	<b>Déformations</b>	<b>31</b>
II.1	Mouvement de déformation homogène . . . . .	32
II.1.1	Définition et propriétés élémentaires (description lagrangienne) . . . . .	32
II.1.2	Tenseurs des déformations entre les configurations $S^a$ et $S^t$ . . . . .	34
II.1.3	Description eulérienne d'un mouvement de déformation homogène . . . . .	35

II.2	Mouvement d'un milieu continu . . . . .	38
II.2.1	La transformation linéaire tangente au mouvement d'une particule $M$ (description lagrangienne) . . . . .	38
II.2.2	Différentielle du champ des vitesses (description eulérienne) . . . . .	40
II.2.3	Grandeurs objectives . . . . .	45
II.3	Calcul de dérivées particulières . . . . .	46
II.3.1	Fonctions de points . . . . .	46
II.3.2	Dérivée particulière et objectivité . . . . .	48
II.3.3	Mode de calcul de dérivées particulières d'intégrales . . . . .	49
II.3.4	Intégrale de volume . . . . .	50
II.3.5	Intégrale de surface (flux) . . . . .	51
II.3.6	Intégrale de ligne (circulation) . . . . .	53
II.3.7	Généralisation. Dérivation suivant un champ de vitesses arbitraire . . . . .	54
II.3.8	Cas où les fonctions sont continûment dérivables par morceaux . . . . .	55
II.4	Petites perturbations autour d'une configuration de référence . . . . .	57
II.4.1	Hypothèses générales . . . . .	57
II.4.2	Dilatation et déformation en H.P.P. . . . .	59
II.4.3	Passage en H.P.P. des variables de Lagrange aux variables d'Euler. Taux de déformations H.P.P. . . . .	61
II.4.4	Définitions locales relatives au tenseur des déformations H.P.P. . . . .	62
II.5	Extension de la terminologie au tenseur des taux de déformations . . . . .	64
<b>III</b>	<b>Lois de conservation de la physique des milieux continus</b> . . . . .	<b>65</b>
III.1	Lemme fondamental de la physique des milieux continus . . . . .	66
III.2	Implications générales d'une loi de conservation . . . . .	67
III.2.1	Loi des actions mutuelles de surface . . . . .	67
III.2.2	Équations aux dérivées partielles associées . . . . .	68
III.2.3	Le tenseur densité de flux . . . . .	70
III.2.4	Équation aux discontinuités . . . . .	72
III.2.5	Forme intégrale générale d'une loi de conservation . . . . .	73
III.2.6	Conditions aux limites naturelles associées à une loi de conservation . . . . .	74
III.2.7	Remarque finale . . . . .	75
III.3	Application à la conservation de la masse . . . . .	76
III.3.1	Équation de continuité . . . . .	76
III.3.2	Surfaces de contact et ondes de choc . . . . .	77
III.3.3	Condition aux frontières . . . . .	78
III.3.4	Milieux incompressibles . . . . .	79
III.3.5	Fonction de courant pour les mouvements plans et les mouvements de révolution stationnaires . . . . .	79
III.4	Application à la conservation de la quantité de mouvement . . . . .	81

III.4.1	Définition du tenseur des contraintes . . . . .	84
III.4.2	Équations du mouvement . . . . .	85
III.4.3	Symétrie du tenseur des contraintes . . . . .	86
III.4.4	Équations aux discontinuités . . . . .	86
III.4.5	Condition aux frontières . . . . .	87
III.4.6	Remarques sur les hypothèses introduites . . . . .	88
III.5	Propriétés et résultats relatifs aux efforts intérieurs . . . . .	89
III.5.1	Puissance virtuelle des efforts intérieurs . . . . .	89
III.5.2	Théorème de l'énergie cinétique . . . . .	93
III.5.3	Objectivité des efforts intérieurs . . . . .	93
III.5.4	Introduction du tenseur des contraintes par dualité . . . . .	94
III.6	Propriétés locales du tenseur des contraintes . . . . .	95
III.6.1	Définitions locales relatives au tenseur des contraintes . . . . .	95
III.6.2	Cercles de Mohr . . . . .	97
III.6.3	Maximum de la contrainte tangentielle . . . . .	99
III.7	Exemples remarquables . . . . .	99
III.7.1	Tenseur des contraintes sphérique (compression ou tension uniforme) . . . . .	99
III.7.2	Tenseur des contraintes uniaxial (traction simple ou compression simple dans une direction) . . . . .	99
III.7.3	Tenseur de cisaillement simple dans deux directions orthogonales . . . . .	100
III.7.4	Tenseur de contraintes planes . . . . .	100
III.7.5	Combinaison linéaire de tenseurs des contraintes . . . . .	101
III.8	Conservation de l'énergie . . . . .	101
III.8.1	Énoncé . . . . .	101
III.8.2	Vecteur courant de chaleur . . . . .	103
III.8.3	Équation aux dérivées partielles . . . . .	103
III.8.4	Équation aux discontinuités . . . . .	104
III.8.5	Condition aux frontières associée . . . . .	104
III.9	Conclusion . . . . .	105
III.10	Nouvelle représentation géométrique des tenseurs des contraintes . . . . .	107

## Deuxième partie

<b>IV</b>	<b>Équations générales et problèmes généraux de l'élasticité classique</b>	<b>113</b>
IV.1	Équations générales de la mécanique des milieux continus en H.P.P autour d'une configuration en équilibre dans un état naturel . . . . .	114
IV.2	Loi de comportement de l'élasticité classique . . . . .	116
IV.2.1	Élasticité linéaire . . . . .	116

IV.2.2	Milieux isotropes. Élasticité classique . . . . .	119
IV.2.3	Interprétation des coefficients d'élasticité . . . . .	121
IV.2.4	Formulation globale de la loi de comportement . . . . .	123
IV.3	Équations générales et théorèmes généraux de l'élastostatique . . . . .	126
IV.3.1	Équations aux déplacements . . . . .	126
IV.3.2	Équations aux contraintes . . . . .	127
IV.3.3	Application du principe des puissances virtuelles . . . . .	129
IV.4	Problèmes plans . . . . .	131
IV.4.1	Champ de contraintes planes . . . . .	131
IV.4.2	Champ de déformations planes . . . . .	132
IV.4.3	Théorie simplifiée des déformations longitudinales des plaques . . . . .	133
IV.5	Notions générales sur les problèmes d'élastostatique . . . . .	136
IV.5.1	Problèmes localement réguliers . . . . .	136
IV.5.2	Principe de Saint-Venant . . . . .	140
<b>V</b>	<b>Problèmes classiques d'élastostatique</b> . . . . .	<b>142</b>
V.1	Remarques préliminaires . . . . .	142
V.2	Traction (ou compression) longitudinale d'une pièce cylindrique . . . . .	143
V.2.1	Solution du problème . . . . .	143
V.2.2	Vérifications expérimentales . . . . .	144
V.3	Compression uniforme d'une pièce quelconque . . . . .	145
V.4	Critères de limite d'élasticité . . . . .	146
V.5	Équilibre d'un réservoir sphérique soumis à des pressions intérieure et extérieure uniformes . . . . .	148
V.6	Équilibre d'un tube cylindrique soumis à des pressions intérieure et extérieure uniformes . . . . .	151
V.7	Pièce cylindrique verticale se déformant sous l'action de son poids . . . . .	155
V.8	Torsion des arbres cylindriques . . . . .	158
V.8.1	Problème préalable . . . . .	159
V.8.2	Formulation rigoureuse du problème théorique . . . . .	160
V.8.3	Résolution des problèmes de torsion . . . . .	160
V.8.4	Application du principe de Saint-Venant. Centre de torsion . . . . .	163
V.8.5	Limite d'élasticité . . . . .	164
V.8.6	Applications . . . . .	165
V.9	Flexion d'une poutre cylindrique soumise à l'action d'un couple terminal (flexion simple) . . . . .	166
V.10	Notions sur la flexion des poutres soumises à l'action de forces terminales transversales . . . . .	169
V.10.1	Hypothèse de départ . . . . .	169
V.10.2	Vérification des conditions aux limites sur $\Sigma_2$ . . . . .	170
V.10.3	Efforts globaux sur $\Sigma_1$ . . . . .	171

V.10.4	Cas de la poutre circulaire . . . . .	172
V.11	Problème de Boussinesq . . . . .	173
V.12	Remarques finales . . . . .	177
<b>VI</b>	<b>Théorèmes de l'énergie. Introduction au calcul des structures</b>	<b>180</b>
VI.1	Problèmes réguliers de type classique . . . . .	181
VI.1.1	Formulation locale d'un problème de structure . . . . .	181
VI.1.2	Formulation globale : problèmes réguliers de type classique . . . . .	183
VI.1.3	Familles de problèmes à données dépendant d'un nombre fini de paramètres . . . . .	188
VI.2	Théorèmes de l'énergie . . . . .	190
VI.2.1	Inégalité fondamentale et théorèmes de l'énergie . . . . .	190
VI.2.2	Les théorèmes de Castigliano . . . . .	192
VI.3	Applications des théorèmes de l'énergie . . . . .	196
VI.3.1	Encadrement de modules de rigidité structuraux . . . . .	196
VI.3.2	Formulation variationnelle d'un problème (P) . . . . .	206
VI.3.3	Méthode approchée de Rayleigh-Ritz . . . . .	209
VI.3.4	Introduction à la méthode des éléments finis . . . . .	213
<b>VII</b>	<b>Milieux curvilignes élastiques classiques</b>	<b>221</b>
VII.1	À propos de Saint-Venant [1797-1886] . . . . .	221
VII.1.1	Principe de Saint-Venant . . . . .	221
VII.1.2	Problème de Saint-Venant . . . . .	222
VII.1.3	Solution de Saint-Venant . . . . .	223
VII.1.4	Hypothèse de Saint-Venant . . . . .	223
VII.2	Statique des milieux curvilignes classiques . . . . .	223
VII.2.1	Géométrie de la configuration initiale . . . . .	223
VII.2.2	Formulation du problème mécanique sur l'arc $C$ . . . . .	226
VII.2.3	Conditions aux limites définissant un problème régulier . . . . .	231
VII.3	Comportement élastique . . . . .	232
VII.3.1	Petites déformations . . . . .	232
VII.3.2	Loi de comportement élastique classique . . . . .	233
VII.4	Les théorèmes de l'énergie . . . . .	237
VII.5	Treillis plans . . . . .	238
VII.5.1	Définition . . . . .	238
VII.5.2	Conséquence pour une barre . . . . .	238
VII.5.3	Problèmes réguliers . . . . .	239
VII.5.4	Système cinématique. Degré de non rigidité de la structure . . . . .	239
VII.5.5	Système statique. Degré d'hyperstaticité de la structure. Équations de compatibilité . . . . .	240

VII.5.6	Résolution d'un problème par rapport aux déplacements . . . . .	242
VII.5.7	Résolution d'un problème hyperstatique par rapport aux efforts intérieurs . . . . .	242
VII.5.8	Exemple : étude d'une potence . . . . .	243
VII.6	Flexion plane des poutres classiques à plan de symétrie . . . . .	247
VII.6.1	Hypothèses et équations générales . . . . .	247
VII.6.2	Poutres d'Euler- Bernoulli . . . . .	248
VII.6.3	Exemples de problèmes isostatiques . . . . .	250
VII.6.4	Évaluation de la prise en compte de l'effet de l'effort tranchant . . . . .	254
VII.6.5	Exemples de problèmes hyperstatiques . . . . .	255
VII.6.6	Fonction d'influence (fonction de Green) . . . . .	259
VII.7	Exemples de déformation d'arcs dans leur plan . . . . .	261
VII.7.1	Hypothèses et équations générales . . . . .	261
VII.7.2	Exemples . . . . .	262
VII.8	Stabilité d'une barre à la compression. Flambement . . . . .	270

### Troisième partie

<b>VIII</b>	<b>Comportement des fluides classiques. Statique des fluides</b>	<b>277</b>
VIII.1	Lois de comportement des fluides classiques . . . . .	277
VIII.1.1	Fluide parfait compressible en évolution barotrope . . . . .	277
VIII.1.2	Fluide compressible de Navier-Stokes . . . . .	281
VIII.1.3	Fluide parfait incompressible . . . . .	283
VIII.1.4	Fluide incompressible de Navier-Stokes . . . . .	284
VIII.2	Statique des fluides . . . . .	286
VIII.2.1	Équations générales . . . . .	286
VIII.2.2	Statique des fluides incompressibles ou hydrostatique . . . . .	287
VIII.2.3	Statique des fluides compressibles . . . . .	288
VIII.2.4	Théorème d'Archimède . . . . .	290
<b>IX</b>	<b>Équations générales et théorèmes généraux de la mécanique des fluides parfaits</b>	<b>291</b>
IX.1	Équations du mouvement d'un fluide parfait . . . . .	292
IX.1.1	Fluides parfaits incompressibles . . . . .	292
IX.1.2	Fluides parfaits compressibles en évolution barotrope . . . . .	292
IX.1.3	Conditions aux frontières . . . . .	293
IX.2	Théorèmes de la quantité de mouvement. Applications . . . . .	293
IX.2.1	Théorème d'Euler . . . . .	293
IX.2.2	Applications . . . . .	295

IX.3	Résultats relatifs à l'énergie . . . . .	297
IX.3.1	Premier théorème de Bernoulli . . . . .	298
IX.3.2	Applications à des écoulements stationnaires de fluides incompressibles . . . . .	300
IX.3.3	Applications à des écoulements de fluides compressibles . . . . .	302
IX.4	Théorème sur le taux de rotation et la circulation . . . . .	309
IX.4.1	Lignes, surfaces et tubes de rotation. Circulation . . . . .	309
IX.4.2	Équation de la rotation et conséquences . . . . .	310
IX.4.3	Écoulements irrotationnels . . . . .	312
IX.5	Conclusion . . . . .	314
<b>X</b>	<b>Écoulements plans irrotationnels et stationnaires d'un fluide parfait incompressible</b>	<b>315</b>
X.1	Généralités sur les écoulements plans d'un fluide incompressible . . . . .	316
X.1.1	Introduction du potentiel complexe . . . . .	316
X.1.2	Propriétés d'uniformité des potentiels complexes . . . . .	317
X.1.3	Écoulements stationnaires . . . . .	320
X.2	Exemples élémentaires . . . . .	320
X.2.1	Écoulement uniforme . . . . .	321
X.2.2	Source et puits . . . . .	321
X.2.3	Tourbillon singulier ponctuel . . . . .	322
X.2.4	Doublet . . . . .	322
X.2.5	Écoulement dans un angle ou autour d'un angle . . . . .	323
X.3	Superposition d'écoulements . . . . .	324
X.3.1	Source et puits de même débit; tourbillons de circulation opposée . . . . .	325
X.3.2	Source en présence d'une paroi plane ou de deux parois planes parallèles . . . . .	326
X.3.3	Superposition d'une source et d'un écoulement uniforme . . . . .	328
X.3.4	Superposition d'un doublet et d'un écoulement uniforme. Écoulement autour d'un cercle sans circulation . . . . .	330
X.3.5	Écoulement autour du cercle avec circulation . . . . .	331
X.4	Calcul des efforts globaux. Formules de Blasius . . . . .	333
X.5	La représentation conforme et ses applications . . . . .	336
X.5.1	Définition et propriétés générales . . . . .	336
X.5.2	Application à la mécanique des fluides . . . . .	338
X.5.3	Principes de la théorie des profils . . . . .	341
X.5.4	Transformation de Joukowski . . . . .	347
X.6	Notions sur la méthode de l'hodographe. Cas du jet . . . . .	349
<b>XI</b>	<b>Écoulements irrotationnels d'un fluide parfait incompressible</b>	<b>353</b>
XI.1	Écoulements plans non stationnaires d'un fluide incompressible . . . . .	354

XI.1.1	Propriétés générales . . . . .	354
XI.1.2	Mouvement plan d'un fluide à l'intérieur d'un cylindre en rotation uniforme autour d'un axe parallèle à ses génératrices . . . . .	356
XI.1.3	Mouvement plan d'un obstacle rigide au sein d'un fluide. Cas du cylindre circulaire . . . . .	357
XI.2	Écoulements dans l'espace d'un fluide incompressible . . . . .	359
XI.2.1	Généralités. Source et puits. Doublet . . . . .	359
XI.2.2	Écoulements stationnaires de révolution . . . . .	361
XI.2.3	Mouvement d'un obstacle au sein d'un fluide . . . . .	364
XI.2.4	Écoulement d'un fluide emplissant une cavité en mouvement . . . . .	369
XI.2.5	Le paradoxe de d'Alembert . . . . .	370
<b>XII</b>	<b>Notions sur les écoulements de fluides visqueux incompressibles</b>	<b>372</b>
XII.1	Résultats généraux relatifs au fluide incompressible de Navier-Stokes . . . . .	373
XII.1.1	Loi de comportement . . . . .	373
XII.1.2	Équations de Navier-Stokes . . . . .	375
XII.1.3	Conditions aux limites . . . . .	376
XII.1.4	Théorème de la quantité de mouvement . . . . .	377
XII.1.5	Résultats relatifs à l'énergie . . . . .	377
XII.1.6	Résultats relatifs à la rotation . . . . .	379
XII.1.7	Écoulements plans et écoulements de révolution . . . . .	380
XII.2	Écoulements viscométriques . . . . .	382
XII.2.1	Écoulement entre deux plans parallèles . . . . .	382
XII.2.2	Écoulement dans un tube cylindrique . . . . .	384
XII.2.3	Écoulement entre deux cylindres coaxiaux . . . . .	386
XII.2.4	Remarque sur les écoulements stationnaires étudiés . . . . .	388
XII.2.5	Écoulements viscométriques à trajectoires curvilignes . . . . .	390
XII.3	Exemples d'écoulements non stationnaires . . . . .	392
XII.3.1	Écoulements à trajectoires parallèles . . . . .	392
XII.3.2	Écoulement produit par la mise en mouvement instantanée d'une paroi . . . . .	393
XII.3.3	Freinage d'un écoulement uniforme par un obstacle au repos . . . . .	395
XII.3.4	Diffusion d'une surface de contact . . . . .	396
XII.3.5	Diffusion de la rotation . . . . .	399
XII.4	Écoulements stationnaires à faible nombre de Reynolds . . . . .	401
XII.4.1	Similitude des écoulements stationnaires de fluide visqueux. Nombre de Reynolds . . . . .	401
XII.4.2	Formulation de la théorie de Stokes . . . . .	404
XII.4.3	Notions sur les écoulements stationnaires à faible nombre de Reynolds autour d'obstacles . . . . .	405

XII.5 Les schémas de la mécanique des fluides et les écoulements de fluides réels . . . . .	409
XII.5.1 Régimes turbulents des écoulements dans les tubes . . . . .	410
XII.5.2 Stabilité hydrodynamique de l'écoulement entre deux cylindres coaxiaux . . . . .	412
XII.5.3 Écoulement d'un fluide faiblement visqueux autour d'un profil . . . . .	414

## Annexe

<b>XIII Rappels et compléments de mathématiques</b>	<b>418</b>
XIII.1 Convention de l'indice muet . . . . .	418
XIII.2 Tenseurs . . . . .	420
XIII.2.1 Définition et propriétés élémentaires d'un tenseur du second ordre . . . . .	420
XIII.2.2 Tenseurs d'ordres supérieurs . . . . .	422
XIII.2.3 Produit tensoriel. Contraction . . . . .	423
XIII.2.4 Changement de base orthonormée . . . . .	425
XIII.2.5 Pseudo-tenseurs . . . . .	428
XIII.3 Formules d'analyse vectorielle et tensorielle . . . . .	430
XIII.4 Formules de transformations d'intégrales . . . . .	432
XIII.5 Formules de calcul des variations . . . . .	434
XIII.6 Problèmes aux limites pour les fonctions analytiques et les fonctions harmoniques de deux variables . . . . .	436
XIII.6.1 Le théorème du maximum-minimum . . . . .	436
XIII.6.2 Détermination d'une fonction holomorphe définie à l'intérieur d'un cercle, connaissant les valeurs prises par sa partie réelle sur ce cercle (problème intérieur) . . . . .	437
XIII.6.3 Théorème des singularités apparentes . . . . .	439
XIII.6.4 Détermination d'une fonction holomorphe définie et bornée à l'extérieur d'un cercle, connaissant les valeurs prises par sa partie réelle sur le cercle (problème extérieur) . . . . .	439
XIII.6.5 Remarques sur le problème de Neumann . . . . .	441
XIII.7 Torseurs . . . . .	442
<b>XIV Équations de la mécanique des milieux continus en coordonnées curvilignes orthogonales</b>	<b>444</b>
XIV.1 Notations . . . . .	444
XIV.2 Expression des opérateurs classiques . . . . .	446
XIV.3 Dérivées des vecteurs $e_i$ . . . . .	448
XIV.4 Gradient d'un champ de vecteurs . . . . .	449
XIV.5 Tenseur des taux de déformations. Tenseur des déformations H.P.P. . . . .	450
XIV.6 Composantes de l'accélération . . . . .	451
XIV.7 Divergence d'un champ de tenseurs symétriques du second ordre . . . . .	451

XIV.8 Applications . . . . .	452
XIV.8.1 Coordonnées cylindriques ou semi-polaires . . . . .	453
XIV.8.2 Coordonnées sphériques ou polaires . . . . .	455
<b>Bibliographie</b>	<b>459</b>
<b>Index</b>	<b>460</b>