

Table des matières

I	Éléments de théorie locale des bifurcations	5
1	Introduction	7
2	Bifurcations en Dimension 1	9
2.1	Bifurcation Noeud - Col	9
2.2	Bifurcation Fourche	12
3	Bifurcations en Dimension 2	15
3.1	Bifurcation de Hopf	15
3.2	Exemple : Brussélateur homogène	22
3.3	Bifurcation de Hopf en présence de la symétrie $SO(2)$	25
3.4	Bifurcation Stationnaire en présence de la symétrie $O(2)$	27
4	Variétés centrales	31
4.1	Notations	31
4.2	Variétés centrales locales	32
4.2.1	Hypothèses	32
4.2.2	Résultat principal	35
4.2.3	Vérification de l'Hypothèse 4.2.7	36
4.2.4	Exemple	38
4.3	Cas particuliers et extensions	41
4.3.1	Variétés centrales dépendant d'un paramètre	41
4.3.2	Variétés centrales non autonomes	45
4.3.3	Symétries	47
4.4	Autres exemples et Exercices	50
4.4.1	Modèle de Burgers	50
4.4.2	Equation de Swift-Hohenberg	56
5	Formes normales	65
5.1	Théorème principal	65
5.1.1	Démonstration du Théorème 5.1.2	67
5.1.2	Exemples en Dimension 2 : $i\omega, 0^2$	70
5.1.3	Exemples en Dimension 3 : $0(i\omega), 0^3$	74
5.1.4	Exemples en Dimension 4 : $(i\omega_1)(i\omega_2), (i\omega)^2, 0^2(i\omega)$	75
5.2	Formes normales avec paramètre	77
5.2.1	Résultat principal	77
5.2.2	Formes normales linéaires	79
5.2.3	Calcul de formes normales dépendant d'un paramètre	80
5.2.4	Exemple : Forme normale 0^2 avec paramètre	81
5.3	Symétries et Réversibilité	83

2 – TABLE DES MATIÈRES

5.3.1	Champs de vecteurs équivariants	83
5.3.2	Champs de vecteurs réversibles	84
5.3.3	Exemple : Système de van der Pol	84
5.4	Formes normales pour les systèmes réduits sur les variétés centrales	86
5.4.1	Calcul simultané des Variétés centrales et des Formes normales	86
5.4.2	Exemple 1 : Bifurcation de Hopf	87
5.4.3	Exemple 2 : Bifurcations de Hopf avec symétries	89
5.4.4	Exemple 3 : Bifurcation de Takens–Bogdanov	95
5.4.5	Exemple 4 : Bifurcation $(i\omega_1)(i\omega_2)$	99
5.5	Autres formes normales	102
5.5.1	Formes normales périodiques de t	102
5.5.2	Exemple : Bifurcation de Hopf forcée périodiquement	105
5.5.3	Formes normales pour les champs de vecteurs analytiques	109
6	Instabilités hydrodynamiques	113
6.1	Le problème hydrodynamique	113
6.2	Le problème de Couette–Taylor	116
6.3	Convection de Bénard–Rayleigh	120
6.4	Instabilité et bifurcation dans l'écoulement de Poiseuille plan	127
6.4.1	Calculs explicites	129
7	Appendice de la partie I : Eléments d'Analyse Fonctionnelle	133
7.1	Opérateurs bornés et opérateurs fermés	133
7.2	Résolvante et spectre	134
7.3	Opérateurs compacts et opérateurs à résolvante compacte	135
7.4	Opérateur adjoint	136
7.5	Opérateurs de Fredholm	137
7.6	Espaces de Sobolev	137
II	Instabilités en mécanique des fluides	143
8	Introduction	145
9	Instabilités dans un fluide au repos	147
9.1	Instabilité gravitaire de Rayleigh–Taylor	147
9.2	Instabilité capillaire de Rayleigh–Plateau	151
9.3	Instabilité thermique de Rayleigh–Bénard	151
9.4	Instabilité thermocapillaire de Bénard–Marangoni	155
9.5	Instabilité de Saffman–Taylor d'un front visqueux	156
10	Stabilité des écoulements ouverts : idées de base	157
10.1	Écoulement forcé : forçages canoniques	157
10.2	Réponse impulsionnelle – Définitions	157
10.3	Illustration : ondes sur un film liquide tombant	159
11	Instabilité non visqueuse des écoulements parallèles	163
11.1	Illustrations	163
11.2	Relation de dispersion	166
11.3	Réduction à un problème bidimensionnel	167
11.4	Équation de Rayleigh et théorème du point d'inflexion	168
11.5	Profil de vitesse linéaire par morceaux	168
11.6	Instabilité d'une couche de mélange	169

11.7	Instabilité centrifuge de Couette-Taylor	171
12	Instabilité visqueuse des écoulements parallèles	173
12.1	Illustrations	173
12.2	Résultats généraux	174
12.3	Écoulement de Poiseuille plan	176
12.4	Couche limite sur une plaque plane	181
13	Dynamique non linéaire à petit nombre de degrés de liberté	185
13.1	L'équation de Landau	185
13.2	Oscillateurs non linéaires	186
13.3	Cas d'une équation aux dérivées partielles	190
13.4	Illustration expérimentale : ondes sur une interface cisillée.	191
14	Ondes dispersives non linéaires	195
14.1	Stabilité des ondes de gravité d'amplitude finie	195
14.2	Un problème modèle : chaîne d'oscillateurs couplés	198
14.3	Analyse alternative : dynamique d'un paquet d'ondes	201
15	Dynamique non linéaire des systèmes dissipatifs	205
15.1	Dynamique d'un paquet d'ondes	205
15.2	Illustration : convection de Rayleigh-Bénard	207
15.3	Ondes dissipatives propagatives	207
16	Appendice de la partie II : Calcul de la bifurcation de Hopf de l'écoulement de Poiseuille plan	211
III	Bifurcations et stabilité en mécanique des structures	219
17	Modèles et structures simples	221
17.1	Introduction	221
17.2	Systèmes discrets	221
17.3	Flambage de poutres	223
17.3.1	La poutre comprimée	223
17.3.2	La poutre de Beck	225
17.4	Plaques de von Kármán	227
17.5	Coques cylindriques	232
17.6	Problèmes à plusieurs paramètres	235
17.6.1	Calottes sphériques	235
17.6.2	Poutres à paroi minces	235
17.6.3	Application à des grandes structures industrielles	240
17.7	Quelques autres problèmes	246
18	Sur le calcul des branches bifurquées	249
18.1	Préliminaires	249
18.1.1	Définitions et outils fondamentaux	249
18.2	Méthode de Lyapunov Schmidt	254
18.2.1	Applications et Analyse globale	256
18.3	Fondements du calcul numérique	259
18.3.1	Approximation dans les problèmes non linéaires	260
18.3.2	Méthodes de suivi de courbe (ou continuation)	264
18.4	A propos de la stabilité	267
18.4.1	Premier résultat en mécanique	268

4 – TABLE DES MATIÈRES

18.5	Sensibilité aux imperfections	271
18.6	Autres travaux	273
19	Sur la multiplicité des états d'équilibre	277
19.1	Introduction	277
19.1.1	Retour sur les théorèmes de bifurcation	277
19.1.2	Flambement d'une membrane circulaire plate	278
19.1.3	Flambement d'un elastica effilé	279
19.2	Le cas d'une calotte sphérique	281
19.2.1	Le problème d'équilibre	281
19.2.2	Le cas générique : coque mince et peu profonde	283
19.2.3	La coque tend vers une plaque	286
19.2.4	La coque tend vers une membrane	287
19.3	Le cas général d'une coque peu profonde	290
19.3.1	Le problème membranaire	291
19.3.2	L'ensemble des solutions	292
20	Bifurcations plastiques en mécanique des structures	299
20.1	Quelques observations	299
20.2	Flambage et post-flambage plastiques : résultats classiques	301
20.2.1	Flambage plastique	303
20.2.2	Le problème en vitesses initiales	304
20.2.3	Cas d'un état prébifurqué hétérogène	304
20.2.4	Post-flambage plastique	305
20.3	Des modèles simples	308
20.3.1	Un premier modèle simple	308
20.3.2	Analyse complète du modèle de Shanley-Hutchinson	310
20.3.3	Effet des nonlinéarités géométriques	315
20.4	La poutre comprimée en élastoplasticité	318
20.4.1	Un problème à frontière libre	319
20.4.2	Le problème en vitesses initiales	319
20.4.3	Vers une méthode de continuation	323
20.4.4	Corollaire	325
20.4.5	Extension à d'autres structures	326
20.5	Quelques problèmes ouverts	327
20.5.1	Présence d'autres types de non linéarités	327
20.5.2	Sur la théorie des bifurcations	328