

Sommaire :

Introduction et rappels de cours

Chapitre 1 — Équations différentielles : cours

1.1 Définitions et premières conséquences

- Définitions fondamentales
- Solutions d'une équation différentielle
- Problème de Cauchy
- Existence et unicité

1.2 Théorème de Cauchy-Lipschitz local — Solutions maximales

- 1.2.1 Fonction localement lipschitzienne
- 1.2.2 Théorème de Cauchy-Lipschitz local
- 1.2.3 Solution maximale d'une équation différentielle

1.3 Théorème de Cauchy-Lipschitz global

1.4 Comportement aux extrémités du domaine de définition

- Solutions maximales
- Prolongement des solutions
- Explosion en temps fini

1.5 Cas particuliers où les solutions maximales sont globales

1.6 Équations différentielles linéaires

- 1.6.1 Définitions
- 1.6.2 Équation linéaire homogène associée
- Wronskien de $\diamond$ solutions
- 1.6.3 Méthode de variation des constantes

1.7 Équations différentielles linéaires scalaires d'ordre $\diamond$

- 1.7.1 Définition
- 1.7.2 Wronskien de $\diamond$ solutions

1.8 Équations différentielles linéaires à coefficients constants

- 1.8.1 Intégration de l'équation homogène
- 1.8.2 Intégration de l'équation complète

1.9 Équation différentielle scalaire d'ordre $\diamond$ à coefficients constants

- 1.9.1 Intégration de l'équation homogène
- 1.9.2 Intégration de l'équation complète
- Théorème d'Heaviside

1.10 Systèmes différentiels autonomes

- 1.10.1 Définitions
- 1.10.2 Cas particuliers des équations scalaires
- 1.10.3 Trajectoires associées à une équation autonome
- 1.10.4 Cas où $\diamond$ est orthogonal à un champ de gradient
- 1.10.5 Trajectoires admettant un point double
- 1.10.6 Étude d'un système autonome autour d'un point d'équilibre
 - Cas linéaire
 - Cas non linéaire
 - Théorèmes de **Lyapunov** et **Hartman-Grobman**
- 1.10.7 Théorème de **Poincaré-Bendixson**

1.11 Solutions approchées des équations différentielles

- 1.11.1 Rappels théoriques
- 1.11.2 Méthode d'Euler
- 1.11.3 Méthode de Runge-Kutta

1.12 Équations et techniques à connaître

- 1.12.1 Équations de Bernoulli et de Riccati
- 1.12.2 Équation de Riccati
- 1.12.3 Changements de variable dans une équation différentielle
- 1.12.4 Lemme utile
- systèmes homogènes
- systèmes à coefficients constants
- matrices et exponentielle de matrices
- problèmes de Cauchy
- stabilité
- résolution de systèmes différentiels

2.2 Équations différentielles linéaires scalaires

Exercices sur :

- équations du premier ordre
 - équations d'ordre $\diamond$
 - équations à coefficients constants
 - équations homogènes et complètes
 - variation des constantes
 - problèmes issus des concours
-

Chapitre 3 — Équations différentielles non linéaires — Systèmes autonomes

Cette partie est consacrée à l'étude qualitative des équations différentielles non linéaires.

On y trouve notamment :

- équations différentielles non linéaires
- systèmes autonomes
- points d'équilibre
- stabilité des équilibres
- étude des trajectoires
- comportement asymptotique
- portraits de phase
- applications des théorèmes de Lyapunov
- systèmes dynamiques

Chapitre 4 — Équations différentielles avec conditions aux limites

C'est la partie la plus avancée de l'ouvrage.

4.1 Étude des solutions d'une équation différentielle

- **4.1.1** Noyau de Green associé à l'équation différentielle
- **4.1.2** Opérateur associé au noyau de Green
- **4.1.3** Propriétés de symétrie de l'opérateur
- **4.1.4** Valeurs propres de l'opérateur

4.2 Problème de Sturm-Liouville

- **4.2.1** Introduction et présentation
- **4.2.2** Étude d'un opérateur linéaire
- **4.2.3** Propriétés de l'opérateur
- **4.2.4** Retour au problème de Sturm-Liouville
- **4.2.5** Introduction du complété
- **4.2.6** Étude sur un exemple des solutions du problème de Sturm-Liouville
- **4.2.7** Retour au cas général