

Sommaire :

I. Fondements de la Théorie de la Mesure

- **Espaces mesurables** : Tribus, générateurs et boréliens.
- **Mesures** : Définition, propriétés et construction de la mesure de Lebesgue.
- **Intégration de Lebesgue** : Fonctions mesurables, théorèmes de convergence (Convergence monotone, Lemme de Fatou, Convergence dominée).
- **Espaces L^p** : Inégalités fondamentales et structure des espaces de fonctions intégrables.

II. Variables Aléatoires et Lois

- **Espaces probabilisés** : Axiomes de Kolmogorov et interprétation fréquentiste.
- **Variables aléatoires réelles** : Fonction de répartition, densité de probabilité et lois usuelles (Binomiale, Poisson, Normale, Exponentielle).
- **Vecteurs aléatoires** : Lois conjointes, lois marginales et indépendance.

III. Espérance et Moments

- **Calcul de l'espérance** : Propriétés de linéarité et théorème de transfert.
- **Moments d'une variable** : Variance, covariance et corrélation.
- **Fonctions caractéristiques** : Propriétés, transformée de Fourier et unicité de la loi.

IV. Convergence et Théorèmes Limites

- **Types de convergence** : Convergence presque sûre, en probabilité, dans L^p et en loi.
- **Lois des Grands Nombres (LGN)** : Versions faible et forte.
- **Théorème Central Limite (TCL)** : Convergence vers la loi normale et applications statistiques.

V. Conditionnement et Processus

- **Espérance conditionnelle** : Définition par rapport à une tribu (approche L^2).
- **Martingales** : Introduction aux suites de variables aléatoires liées au temps.
- **Chaînes de Markov** : Matrice de transition, états récurrents et transitoires, mesures stationnaires.