

Sommaire :

1. Espaces de Probabilité

- Expérience aléatoire et modélisation.
- Tribus et mesures de probabilité.
- Propriétés de continuité d'une probabilité.
- **Probabilités conditionnelles** et indépendance d'événements.

2. Variables Aléatoires Discrètes

- Loi d'une variable aléatoire, fonction de masse.
- Espérance, variance et moments.
- Étude détaillée des lois : **Bernoulli, Binomiale, Géométrique, Poisson.**
- Fonctions génératrices.

3. Variables Aléatoires Absolument Continues

- Densité de probabilité et fonction de répartition.
- Calcul d'espérances et de moments par l'intégrale de Lebesgue.
- Lois usuelles : **Uniforme, Exponentielle, Normale (Gauss), Gamma, Bêta.**
- Changement de variables.

4. Vecteurs Aléatoires

- Lois conjointes, lois marginales et lois conditionnelles.
- Indépendance de variables aléatoires.
- **Vecteurs gaussiens** : matrice de covariance et propriétés.
- Sommes de variables indépendantes et produit de convolution.

5. Convergence et Théorèmes Limites

- Les quatre types de convergence : **presque sûre, en probabilité, en loi, en moyenne** (L^p).
- Inégalités de Markov, Bienaymé-Tchebychev et Kolmogorov.
- Loi forte des grands nombres.
- **Théorème Central Limite** et applications aux approximations.

6. Fonctions Caractéristiques

- Définition, propriétés et injectivité.
- Lien entre convergence en loi et convergence des fonctions caractéristiques.
- Utilisation pour la somme de variables indépendantes.

7. Espérance Conditionnelle

- Conditionnement par rapport à une tribu ou une variable aléatoire.
- Propriétés de l'espérance conditionnelle (linéarité, stabilité, projection L^2).
- Applications à la prévision.

8. Introduction aux Processus Aléatoires et à la Statistique

- Notions sur les **chaînes de Markov** à espace d'états fini.
- Introduction à l'estimation statistique (biais, risque quadratique).