Sommaire :

. Espaces de Probabilités et Théorie de la Mesure

Cette partie pose le cadre formel indispensable pour traiter les probabilités non plus comme de simples proportions, mais comme des objets analytiques.

- **Ensembles et événements :** La structure de σ-algèbre (tribu).
- **Mesures de probabilité :** Axiomes de Kolmogorov et propriétés de continuité décroissante/croissante.
- **Construction de mesures :** Rappels sur la mesure de Lebesgue et le théorème de prolongement.

II. Variables Aléatoires et Intégration

L'auteur fait ici le lien direct entre la variable aléatoire et l'intégrale de Lebesgue.

- **Mesurabilité :** Définition formelle d'une variable aléatoire.
- **Lois de probabilités :** Lois discrètes, lois à densité et fonctions de répartition.
- **Espérance mathématique :** Définition via l'intégrale par rapport à une mesure, propriétés de linéarité et de positivité.
- **Espaces L^p :** Moment d'ordre k, variance et inégalités fondamentales (Jensen, Hölder, Minkowski).

III. Indépendance et Produit de Mesures

- **Indépendance d'événements et de variables :** Critères de factorisation.
- **Théorème de Fubini :** Application au calcul des lois jointes et des produits de convolution.
- **Sommes de variables indépendantes :** Calcul de la loi d'une somme.

IV. Convergence et Théorèmes Limites

C'est le cœur de la statistique théorique et de l'analyse asymptotique.

- **Les quatre types de convergence :** Presque sûre, en probabilité, en moyenne d'ordre p et en loi.
- **Fonctions caractéristiques :** Définition, injectivité et lien avec la convergence en loi.
- **Lois des Grands Nombres :** Versions faible et forte.
- **Théorème Central Limite (TCL) :** Comportement asymptotique des sommes normalisées.

V. Conditionnement

- **Espérance conditionnelle :** Définition rigoureuse par rapport à une sous-tribu (théorème de Radon-Nikodym).
- **Probabilités conditionnelles :** Lois conditionnelles et applications.