Sommaire :

Partie I : Théorie de la Mesure et de l'Intégration

Cette partie pose les fondations mathématiques nécessaires.

1. **Tribus et Mesures :** Définitions, propriétés, mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}$.
2. **Fonctions Mesurables et Intégration :** Construction de l'intégrale de Lebesgue, fonctions intégrables.
3. **Théorèmes de Convergence :** Convergence monotone, Lemme de Fatou, et le théorème de **Convergence Dominée**.
4. **Espaces L^p :** Inégalités de Hölder et Minkowski, complétude et dualité.
5. **Produits de Mesures :** Théorème de Fubini-Tonelli et Fubini-Lebesgue.
6. **Changement de Variables :** Formules de calcul intégral dans $\mathbb{R}^n$.

Partie II : Fondements des Probabilités

Le passage de la mesure vers le langage probabiliste.

7. **Variables Aléatoires :** Lois de probabilité, fonctions de répartition, espérance (vue comme une intégrale).

8. **Indépendance :** Indépendance d'événements et de variables, Lemmes de Borel-Cantelli.

9. **Lois de Probabilité Classiques :** Lois discrètes (Binomiale, Poisson) et continues (Normale, Exponentielle).

Partie III : Convergence et Théorèmes Limites

Le cœur de la théorie des probabilités asymptotiques.

10. **Convergences Stochastiques :** Convergence presque sûre, en probabilité, et dans L^p.

11. **Lois des Grands Nombres :** Loi faible (inégalité de Bienaymé-Tchebychev) et Loi forte (inégalité de Kolmogorov).

12. **Convergence en Loi :** Définition, lien avec les autres convergences.

13. **Fonctions Caractéristiques :** Transformée de Fourier des mesures, théorème d'inversion.

14. **Le Théorème Central Limite (TCL) :** Preuve via les fonctions caractéristiques et applications.

Partie IV : Compléments et Statistique

15. **Vecteurs Gaussiens :** Lois normales multidimensionnelles, indépendance et corrélation.
16. **Introduction à la Statistique :** Échantillonnage, estimation ponctuelle et par intervalle de confiance.

17. **Simulation :** Méthodes de Monte-Carlo et génération de variables aléatoires.