

Sommaire

I. Introduction aux groupes et aux symétries

- Notion de symétrie
- Définition d'un groupe
- Exemples fondamentaux
 - Groupe des entiers
 - Groupe des permutations
 - Groupes de matrices
- Sous-groupes
- Homomorphismes et isomorphismes

II. Groupes finis

- Définition
- Ordre d'un groupe
- Ordre d'un élément
- Théorème de Lagrange
- Groupes cycliques
- Groupes abéliens finis
- **Groupes de permutations**
- Classes de conjugaison
- Théorèmes de Sylow
- Exemples et applications

III. Groupes continus (groupes de Lie)

- Définition
- Variétés différentiables
- **Exemples**
- Sous-groupes de Lie
- Actions de groupes

IV. Algèbres de Lie

- Définition
- Crochet de Lie
- Identité de Jacobi
- Algèbre tangentielle d'un groupe de Lie
- Exemples
 - $\mathfrak{gl}(n)$
 - $\mathfrak{sl}(n)$
 - $\mathfrak{so}(n)$
 - $\mathfrak{su}(n)$
- Sous-algèbres
- Idéaux
- Algèbres simples et semi-simples

V. Représentations des groupes

- Définition
- Espaces vectoriels invariants
- Représentations irréductibles
- Décomposition en composantes irréductibles
- Caractères
- Table des caractères
- Lemme de Schur
- Orthogonalité des caractères

VI. Représentations des algèbres de Lie

- Modules
- Représentations matricielles
- Poids et racines
- Algèbre de Cartan
- Diagrammes de Dynkin
- Classification des algèbres simples

VII. Applications

- Physique classique
- Mécanique quantique
- Théorie des particules
- Cristallographie
- Chimie moléculaire
- Robotique
- Vision par ordinateur
- Cryptographie

VIII. Exercices et études de cas

- Calcul de groupes de symétrie
- Détermination de sous-groupes
- Construction de représentations
- Calcul de caractères
- Applications aux rotations et réflexions
- Études de groupes de matrices

IX. Bibliographie conseillée

- Abstract Algebra
- Representation Theory
- Lie Groups, Lie Algebras, and Representations
- Introduction to Lie Algebras and Representation Theory
- Linear Representations of Finite Groups