

Sommaire

1. Introduction à la géométrie et à la topologie

- Définitions et concepts de base en géométrie et topologie
- Lien entre géométrie, topologie et analyse
- Présentation du travail de William Thurston et de ses contributions majeures
- Objectifs et applications de la géométrie et de la topologie dans la recherche mathématique

2. Notions fondamentales de topologie

- Espaces topologiques : définition et exemples
- Compacité, connexité et séparabilité
- Théorèmes de base : théorème de Bolzano-Weierstrass, théorème de l'ensemble ouvert
- Introduction aux espaces métriques et à la distance

3. Géométrie des surfaces

- Surfaces orientables et non orientables
- Caractéristique d'Euler et applications
- Classification des surfaces
- Introduction à la géométrie hyperbolique
- Modèles de la géométrie hyperbolique (disque de Poincaré, modèle de Klein)

4. Géométrie des variétés en dimension 3

- Définition des variétés : topologie et géométrie
- Structures géométriques en dimension 3
- Les géométries tridimensionnelles : sphérique, euclidienne, hyperbolique
- Théorème de la géométrisation de Thurston : vue d'ensemble
- Types de géométries et leur classification

5. Les structures de Thurston

- Le théorème de géométrisation : historique et développement
- Les trois types de géométries : hyperbolique, elliptique et euclidienne
- Applications aux variétés tridimensionnelles
- Modélisation de variétés tridimensionnelles dans les géométries étudiées

6. Groupes fondamentaux et invariants topologiques

- Groupes fondamentaux et leur rôle en topologie
- Invariants topologiques : homologie, cohomologie, et structures de bord
- Applications aux surfaces et variétés tridimensionnelles
- Rôle du groupe fondamental dans la géométrisation des variétés

7. Topologie des nœuds et des liens

- Introduction à la théorie des nœuds
- Invariants des nœuds et classification des nœuds
- Applications de la topologie des nœuds dans les variétés tridimensionnelles
- Nœuds, liens et géométrie hyperbolique

8. Applications des géométries dans la physique

- Géométrie des variétés et relativité générale
- Géométrie des espaces-temps et topologie des trous noirs
- Les applications en cosmologie et en mécanique quantique

9. Applications informatiques et calculs en géométrie

- Modélisation numérique des variétés et des géométries
- Utilisation de logiciels pour visualiser des variétés tridimensionnelles (comme TopoMan, SnapPea)
- Calculs symboliques en topologie et géométrie à l'aide de logiciels mathématiques

10. Études de cas et exercices pratiques

- Résolution de problèmes classiques en géométrie et topologie
- Exercices d'application sur les variétés et les géométries
- Études de cas : variétés en géométrie hyperbolique et structures de Thurston
- Démonstrations et applications des théorèmes de Thurston

11. Conclusion : vers de nouvelles recherches

- Les recherches actuelles en topologie et géométrie des variétés
- Perspectives offertes par la géométrie tridimensionnelle dans la mathématique moderne
- Le rôle de la géométrie et de la topologie dans les sciences pures et appliquées
- Liens entre les travaux de Thurston et les développements récents

Annexes :

- Liste de lectures supplémentaires et de ressources en ligne
- Dictionnaire des termes mathématiques utilisés
- Bibliographie complète des œuvres de William Thurston et des travaux associés
- Solutions détaillées des exercices