

## Sommaire :

1. **Introduction à l'intégration**
  - Historique et motivation de la notion d'intégration
  - Intégration au sens de Riemann et de Lebesgue
  - Objectifs et enjeux de la théorie de l'intégration
2. **Partie I : L'intégration de Riemann**
  - **Chapitre 1 : Notions préliminaires**
    - Ensembles mesurables et fonctions continues
    - Fonction de distribution et convergence
  - **Chapitre 2 : Définition de l'intégrale de Riemann**
    - Intégration sur des intervalles fermés
    - Critères d'intégrabilité
  - **Chapitre 3 : Propriétés de l'intégrale de Riemann**
    - Linéarité et additivité
    - Théorème fondamental de l'analyse
    - Applications pratiques de l'intégrale de Riemann
  - **Chapitre 4 : Techniques de calcul d'intégrales de Riemann**
    - Méthodes d'intégration : substitution, parties, intégration par fractions
    - Intégration des fonctions rationnelles et trigonométriques
3. **Partie II : L'intégration dans les espaces métriques**
  - **Chapitre 1 : Espaces métriques et fonctions mesurables**
    - Définition des espaces métriques
    - Fonctions mesurables et intégrabilité dans un espace métrique
  - **Chapitre 2 : Théorème de convergence dominée**
    - Formulation et démonstration du théorème
    - Applications pratiques et exemples
  - **Chapitre 3 : Intégrale de Lebesgue sur les espaces mesurables**
    - Construction de l'intégrale de Lebesgue
    - Comparaison avec l'intégrale de Riemann
    - Propriétés et avantages de l'intégrale de Lebesgue
4. **Partie III : Théorèmes avancés en théorie de l'intégration**
  - **Chapitre 1 : Théorème de Fubini**
    - Énoncé et applications à l'intégration double et triple
    - Preuves et exemples pratiques
  - **Chapitre 2 : Théorème de l'intégration par parties**
    - Formulation générale et applications
    - Applications dans le calcul des intégrales
  - **Chapitre 3 : Convergence monotone et théorème de Fatou**
    - Définitions et démonstrations
    - Convergence des suites de fonctions mesurables
  - **Chapitre 4 : Intégrabilité dans les espaces  $L_p$** 
    - Espaces  $L_p$  et leur rôle en analyse
    - Propriétés des fonctions  $L_p$  intégrables
5. **Partie IV : Applications de l'intégration**
  - **Chapitre 1 : Applications en analyse réelle**
    - Calcul des intégrales sur des courbes et surfaces
    - Applications aux séries de Fourier
  - **Chapitre 2 : Applications en probabilités**
    - Intégration dans les espaces de probabilités
    - Fonction de densité et intégration par rapport à une loi de probabilité
  - **Chapitre 3 : Intégration et équations différentielles**
    - Résolution des équations différentielles à l'aide de l'intégration

- Applications aux systèmes dynamiques et à la modélisation mathématique
- 6. **Partie V : Exercices corrigés et problèmes**
  - **Chapitre 1 : Exercices de base sur l'intégration de Riemann**
    - Exercices de calcul d'intégrales simples
    - Application des propriétés de l'intégrale de Riemann
  - **Chapitre 2 : Exercices sur les intégrales dans les espaces métriques**
    - Problèmes d'intégration dans les espaces  $L_p$
    - Application des théorèmes de convergence
  - **Chapitre 3 : Exercices avancés sur l'intégrale de Lebesgue**
    - Calculs d'intégrales de Lebesgue et théorèmes associés
    - Problèmes d'intégrabilité sur des ensembles complexes
  - **Chapitre 4 : Problèmes d'application en physique et en probabilité**
    - Problèmes issus des sciences appliquées et de la théorie des probabilités
- 7. **Partie VI : Approfondissement et compléments**
  - **Chapitre 1 : L'intégrale dans les espaces topologiques**
    - Extensions de l'intégrale dans les espaces topologiques
    - Applications en topologie et analyse fonctionnelle
  - **Chapitre 2 : Intégration et géométrie différentielle**
    - Rôle de l'intégration dans les géométries courbes
    - Théorèmes géométriques et applications pratiques
- 8. **Conclusion**
  - Récapitulatif des concepts clés de la théorie de l'intégration
  - Perspectives d'étude et d'applications avancées
  - Suggestions pour aller plus loin dans l'analyse
- 9. **Annexes**
  - Notions préalables de calcul différentiel et intégral
  - Tableaux de formules et théorèmes utiles
  - Bibliographie et ressources supplémentaires