

# Sommaire

- 1. Introduction à l'algèbre linéaire**
2. Définition et objectifs de l'algèbre linéaire
3. Histoire et applications de l'algèbre linéaire dans les sciences modernes
4. Concepts de base : espaces vectoriels, matrices, systèmes linéaires
- 5. Espaces vectoriels**
- 6. Définition d'un espace vectoriel**
  - a. Axiomes et propriétés fondamentales des espaces vectoriels
- 7. Sous-espaces vectoriels**
  - a. Caractérisation, bases et dimensions
  - b. Sous-espaces associés (orthogonal, image, noyau)
- 8. Opérations dans un espace vectoriel**
  - a. Addition de vecteurs, multiplication par un scalaire
  - b. Propriétés et théorèmes liés aux opérations
- 9. Bases et dimensions**
  - a. Définition de base, critères de dépendance et indépendance linéaire
  - b. Théorème de la base et dimension
- 10. Matrices et opérations sur les matrices**
- 11. Définition et types de matrices**
  - a. Matrices carrées, rectangulaires, diagonales, symétriques
- 12. Opérations sur les matrices**
  - a. Addition, multiplication, transposition
  - b. Inversion des matrices : conditions et méthodes de calcul
- 13. Rang d'une matrice**
  - a. Définition et propriétés
  - b. Calcul du rang par la méthode de Gauss-Jordan
- 14. Matrices particulières et applications**
  - a. Matrices orthogonales, matrices triangulaires, matrices inversibles
- 15. Systèmes d'équations linéaires**
- 16. Méthodes de résolution des systèmes**
  - a. Méthode de substitution, méthode de l'élimination de Gauss
  - b. Méthode de Cramer et règle de Cramer
- 17. Applications des systèmes d'équations linéaires**
  - a. Résolution de systèmes physiques, économiques, et d'ingénierie
  - b. Modélisation par matrices et vecteurs
- 18. Existence et unicité des solutions**
  - a. Conditions de solvabilité et théorème de Rouché–Fréchet
  - b. Cas des systèmes sous-déterminés et sur-déterminés
- 19. Valeurs et vecteurs propres**
- 20. Définition des valeurs propres et vecteurs propres**
  - a. Théorème spectral et caractéristiques des matrices diagonalisables
- 21. Calcul des valeurs propres**
  - a. Résolution de l'équation caractéristique
  - b. Méthode de la matrice jordanienne pour les matrices non-diagonalisables
- 22. Applications des valeurs et vecteurs propres**
  - a. Diagonalisation des matrices et réduction de matrices
  - b. Applications en physique : mécanique quantique, oscillations
- 23. Diagonalisation et formes normales**
- 24. Diagonalisation d'une matrice**
  - a. Conditions de diagonalisation, processus de diagonalisation
  - b. Théorème de Cayley-Hamilton
- 25. Formes normales des matrices**
  - a. Forme normale de Jordan
  - b. Applications des formes normales dans les systèmes dynamiques

## **26. Espaces vectoriels normés et produits scalaires**

### **27. Produits scalaires et normes**

- a. Définition du produit scalaire et de la norme
- b. Propriétés des produits scalaires : orthogonalité, orthonormalité

### **28. Espaces Euclidiens**

- a. Espaces de dimension finie et géométrie associée
- b. Bases orthogonales et orthonormées

### **29. Orthogonalité et décomposition**

- a. Méthode de Gram-Schmidt pour l'orthonormalisation
- b. Projections orthogonales et applications

### **30. Applications de l'algèbre linéaire**

#### **31. Applications en géométrie**

- a. Transformations linéaires et matrices de transformation
- b. Géométrie analytique : changement de base, rotations, dilatations

#### **32. Applications en informatique**

- a. Algorithmes numériques : résolution de systèmes, décomposition LU
- b. Graphes et matrices d'adjacence

#### **33. Applications en physique et ingénierie**

- a. Mécanique quantique : opérateurs linéaires, matrices de densité
- b. Modélisation en dynamique des systèmes

#### **34. Théorèmes et résultats importants**

#### **35. Théorème de la dimension du noyau et de l'image**

- a. Théorème de la dimension, théorème de l'isomorphisme

#### **36. Théorème de la factorisation**

- a. Décomposition LU et applications pratiques

#### **37. Propriétés des matrices symétriques**

- a. Théorème de spectralité et décomposition orthogonale

#### **38. Théorème de Banach et de Hilbert**

- a. Espaces vectoriels complets et leurs propriétés

#### **39. Exercices et applications**

#### **40. Exercices d'algèbre linéaire élémentaire**

- a. Résolution de systèmes d'équations linéaires
- b. Calcul de valeurs et vecteurs propres

#### **41. Exercices avancés**

- a. Diagonalisation et utilisation des formes normales
- b. Applications aux transformations linéaires et aux matrices

#### **42. Conclusion**

#### **43. Récapitulatif des concepts clés en algèbre linéaire**

#### **44. Importance de l'algèbre linéaire dans les sciences modernes**

#### **45. Perspectives pour l'étude des mathématiques et des applications pratiques**

#### **46. Annexes**

#### **47. Rappels de notions préalables**

- a. Concepts de base en algèbre, calcul matriciel

#### **48. Formules utiles**

- a. Tables de résultats standards : matrices, valeurs propres, produits scalaires

#### **49. Bibliographie et lectures complémentaires**

- a. Ouvrages de référence pour approfondir l'algèbre linéaire et ses applications