

Sommaire

1. **Introduction à la topologie algébrique**
 - Historique et objectifs de la topologie algébrique
 - Les grandes questions de la topologie : classification des espaces topologiques, invariants topologiques
 - Notion d'homotopie et d'homologie
 - Présentation générale des groupes d'homotopie, d'homologie et de cohomologie
2. **Espaces topologiques et continuité**
 - Définition des espaces topologiques
 - Concepts de base : ouverts, fermés, bases de topologie, continuité des fonctions
 - Espaces métriques et espaces de Hausdorff
 - Notions de compacité et connexité
3. **Homotopie et groupes d'homotopie**
 - Définition de l'homotopie entre fonctions continues
 - Groupe fondamental d'un espace topologique
 - Calcul des groupes d'homotopie pour des espaces simples (cercles, sphères)
 - Exemples de groupes d'homotopie : π_1 , π_2 , etc.
 - Propriétés des groupes d'homotopie : exercice de calcul et d'interprétation
4. **Notion de l'homologie singulière**
 - Définition de la chaîne, des cycles et des frontières
 - Le complexe de chaînes et le groupe d'homologie
 - Calcul des groupes d'homologie pour des espaces simples : sphères, tori, etc.
 - Théorème de Poincaré–Lefschetz et applications
 - Interprétation géométrique de l'homologie
5. **Cohomologie et dualité**
 - Introduction à la cohomologie : définitions, groupes de cohomologie
 - Le produit de cup et les produits d'intersection
 - Théorème de dualité de Poincaré
 - Cohomologie et classes caractéristiques
 - Applications aux variétés
6. **Le théorème de classification des surfaces**
 - Notion de surface orientable et non orientable
 - Classification des surfaces compactes : théorème de classification des surfaces
 - Groupes d'homologie des surfaces et calcul des invariants topologiques
 - Exemples détaillés de calcul de l'homologie des surfaces
7. **Applications aux espaces fibrés et aux complexes de Steenrod**
 - Notion de fibrés : fibrés vectoriels et fibrés principaux
 - Chern classes et classes de Steenrod
 - Théorème de la fibration de Serre
 - Complexes de Steenrod et leur rôle en topologie algébrique
8. **Introduction à la théorie de la torsion**
 - Groupes de torsion et leurs propriétés
 - Torsion dans les groupes d'homologie
 - Théorème de Borel sur les groupes de torsion
 - Applications à la géométrie et à la physique
9. **Topologie algébrique et géométrie**
 - Interaction entre topologie algébrique et géométrie différentielle
 - Théorèmes de Morse et applications à la topologie
 - Applications de la topologie algébrique dans la théorie des singularités
 - Applications au calcul de la classe de Stiefel-Whitney
10. **Calcul des invariants topologiques**
 - Invariants de type homologique : Betti numbers, Euler characteristic
 - Applications des invariants topologiques à la classification des variétés
 - Théorème de Gauss-Bonnet
 - Exemples d'application aux variétés de dimension 2 et 3
11. **Les catégories et la théorie des modèles en topologie algébrique**
 - Catégories et foncteurs : introduction à la théorie des catégories
 - Modèles et espaces de modèles pour les théories topologiques
 - Topologie algébrique et théories des catégories
12. **Conclusion et perspectives**
 - Récapitulation des concepts fondamentaux de la topologie algébrique
 - Perspectives et directions futures : topologie algébrique moderne, relations avec la géométrie et la physique
 - Ouverture vers des théories avancées : topologie K-homologique, topologie stable
13. **Annexes**
 - Tableaux de calcul des groupes d'homologie pour certains espaces classiques
 - Rappels de notions de topologie générale nécessaires à la topologie algébrique
 - Index des notations et des résultats théorétiques