

Sommaire

1. **Introduction à la théorie de la mesure**
2. Définition et objectifs de la théorie de la mesure
3. Espace mesurable et σ -algèbre
4. Mesure de Lebesgue : définition et propriétés fondamentales
5. Exemples de mesures : mesure de Lebesgue, mesure de Dirac, mesure de probabilité
6. Mesure et intégration : relations de base
7. **Mesures et fonctions mesurables**
8. Définition des fonctions mesurables
9. Propriétés des fonctions mesurables : invariance par transformations mesurables
10. Espaces L_p et leurs propriétés
11. Convergence des fonctions mesurables : convergence presque partout, convergence en L_p
12. Exercices sur les fonctions mesurables et les propriétés de la σ -algèbre
13. **Intégrale de Lebesgue**
14. Définition de l'intégrale de Lebesgue
15. Propriétés de l'intégrale de Lebesgue
16. Comparaison avec l'intégrale de Riemann : avantages de la mesure de Lebesgue
17. Théorème de Fatou et théorème de la convergence dominée
18. Intégration des fonctions non négatives et intégration des fonctions signées
19. **Convergence des suites de fonctions**
20. Convergence monotone, convergence dominée
21. Convergence presque partout et convergence en mesure
22. Convergence L_p et théorèmes associés
23. Propriétés de la limite de suites de fonctions : intégration et limite
24. Exercices sur la convergence des suites de fonctions mesurables
25. **Théorèmes fondamentaux de l'intégration**
26. Théorème de la convergence monotone
27. Théorème de la convergence dominée
28. Théorème de l'intégrale de Lebesgue pour les fonctions positives
29. Théorème de la mesure produit et intégration sur des espaces produits
30. Applications à l'analyse des séries de Fourier et aux séries de fonctions
31. **Intégration sur des espaces mesurables**
32. Intégration sur des ensembles mesurables généraux
33. Extension de l'intégrale de Lebesgue à des fonctions complexes
34. Propriétés des espaces de fonctions intégrables
35. Mesure et intégration dans des espaces de produit : théorème de Fubini
36. Exercices sur l'intégration dans des espaces mesurables et produits
37. **Mesure et probabilité**
38. Mesure de probabilité et espaces de probabilité
39. Espaces de probabilité : espace de probabilité complet, σ -algèbre associée
40. Fonction de répartition et loi de probabilité
41. Intégrale d'espérance et théorème de la convergence dominée en probabilité
42. Théorème de Markov et inégalités de Chebyshev
43. **Espaces L_p et applications**
44. Définition et propriétés des espaces L_p
45. Normes L_p et leurs propriétés
46. Propriétés des espaces de Banach : espaces L_p comme espaces de Banach
47. Théorème de Banach-Steinhaus et applications en analyse fonctionnelle
48. Intégrabilité dans les espaces L_p : relations avec les probabilités
49. **Intégration sur les variétés et les espaces de Riemann**
50. Intégration sur des variétés mesurables et différentiables
51. Intégration sur des courbes et surfaces : théorie des intégrales curvilignes
52. Formules de Stokes et de divergence pour l'intégration sur les variétés
53. Mesure et intégration dans des espaces non euclidiens
54. Applications à la géométrie différentielle et aux équations aux dérivées partielles
55. **Théorèmes d'approximation et applications**
56. Approximation de fonctions par des fonctions simples
57. Approximation de la mesure : théorème de Lebesgue
58. Approximation de l'intégrale : méthodes de quadrature et séries de Fourier
59. Applications aux séries et aux transformées intégrales
60. Méthodes d'approximation des mesures et intégrales dans des contextes variés
61. **Exercices résolus**
62. **Exercices de base sur la mesure et les fonctions mesurables**
 - a. Séries d'exercices simples sur les définitions et propriétés fondamentales
 - b. Résolution d'exercices sur les σ -algèbres et les fonctions mesurables
63. **Exercices sur l'intégrale de Lebesgue**
 - a. Résolution d'exercices sur les propriétés de l'intégrale de Lebesgue
 - b. Exercices pratiques sur la comparaison avec l'intégrale de Riemann
64. **Exercices de convergence de suites de fonctions**
 - a. Exercices sur les théorèmes de convergence, incluant la convergence dominée et monotone
65. **Exercices sur l'intégration dans des espaces mesurables**
 - a. Résolution d'exercices plus avancés sur l'intégration dans des espaces de produit
66. **Exercices de mesure et probabilité**
 - a. Exercices pratiques sur les espaces de probabilité et les théorèmes de convergence en probabilité
67. **Exercices d'approximation et d'applications variées**
 - a. Résolution d'exercices sur l'approximation des fonctions et des mesures
68. **Conclusion**
69. Résumé des concepts clés abordés
70. Perspectives pour l'étude avancée de la théorie de la mesure et de l'intégration
71. Applications à la théorie des probabilités et à d'autres branches des mathématiques
72. **Annexes**