

---

## **Préambule & Remerciements**

### **Chapitre 1 – Introduction**

- 1.1 Qu'est-ce qu'une fonction calculable ?
- 1.2 Quelles sont les fonctions non calculables ?
- 1.3 Motivations
- 1.4 Panorama de la calculabilité

### **Chapitre 2 – Infinis de Cantor**

- 2.1 Equipotence et sous-puissance
- 2.2 Théorème de Cantor–Bernstein
- 2.3 Ensembles dénombrables
- 2.4 Argument diagonal de Cantor
- 2.5 Réels non calculables
- 2.6 Espace de Cantor

---

## **Partie I : Calculabilité classique**

### **Chapitre 3 – Fondements de la calculabilité**

- Fonctions calculables
- Ensembles calculables
- Programme universel
- Théorème SMN
- Lemme de remplissage
- Point fixe de Kleene
- Ensembles récursivement énumérables

### **Chapitre 4 – Degrés de Turing**

- Chaînes finies
- Calcul avec oracle
- Relativisation
- Propriété de l'usage

*(D'autres chapitres essentiels complètent cette partie, avec exercices et démonstrations.)*

---

## **Partie II : Aléatoire algorithmique**

- Introduction à l'aléatoire algorithmique
  - Espaces de type Borel et classes  $\tau$  (nécessaires pour la partie IV)
  - Constantes de Chaitin (Omega)
  - Liens avec la théorie de la mesure et K-complexité
- 

## **Partie III : Mathématiques à rebours**

- Principes et bases ( $RCA_0$ ,  $WWKL_0$ , DNR, etc.)
  - Analyse des systèmes d'axiomes
  - Applications à la combinatoire et implications logiques
- 

## **Partie IV : Hypercalculabilité**

- Modèles dépassant le calcul de Turing
  - Hiérarchie hyperarithmétique, sauts transfinis ( $ATR_0$ ...)
  - Ordres de grandeur au-delà de l'arithmétique de second ordre
  - Connexions avec la théorie des ensembles
- 

## **Annexes**

- Exercices corrigés (notation étoilée de difficulté 0 à 3)
- Errata et références bibliographiques