

## Table des matières

<b>Préface</b> .....	11
<b>Avant-propos</b> .....	13
<b>Chapitre 1. Introduction</b> .....	17
1.1. Les objectifs de la mécanique des solides .....	17
1.1.1. Le solide rigide .....	17
1.1.2. Le solide déformable .....	18
1.2. Le dimensionnement .....	19
1.3. Contenu du cours .....	19
<b>Chapitre 2. Cinématique du solide déformable</b> .....	23
2.1. Définitions .....	23
2.1.1. Cinématique du solide déformable .....	23
2.1.2. Repérage de Lagrange .....	24
2.1.3. Déplacement .....	25
2.1.4. Déformation .....	26
2.1.5. Mouvement de deux points voisins .....	26
2.1.6. Tenseur gradient de la transformation .....	27
2.1.7. Tenseur de dilatation .....	27
2.2. Tenseurs de déformation en transformation finie .....	28
2.2.1. Tenseur de Green-Lagrange .....	28
2.2.2. Tenseur d'Almansi .....	30
2.2.3. Exemples de champs de déplacement affines .....	30
2.2.4. Changement de base .....	33
2.3. Interprétation des termes du tenseur de Green-Lagrange .....	33
2.3.1. Extension dans la direction $i$ (termes diagonaux) .....	33
2.3.2. Termes non diagonaux .....	34

2.3.3.	Transformation de longueur dans une direction quelconque .....	36
2.3.4.	Transformation d'un élément de volume .....	37
2.3.5.	Transformation d'une surface .....	37
2.4.	Déformations et directions principales .....	38
2.4.1.	Tenseur gradient .....	40
2.4.2.	Tenseur de dilatation .....	40
2.4.3.	Tenseur de Green-Lagrange .....	42
2.4.4.	Invariants .....	42
2.5.	Transformations infinitésimales .....	42
2.5.1.	Conditions .....	43
2.5.2.	Tenseur de déformation infinitésimale .....	43
2.5.3.	Tenseur des rotations .....	44
2.5.4.	Interprétation .....	45
2.5.5.	Extension dans une direction quelconque .....	46
2.5.6.	Vecteur déformation .....	47
2.5.7.	Vecteur glissement .....	48
2.5.8.	Convention de signes .....	48
2.5.9.	Changement de base .....	48
2.5.10.	Invariants .....	49
2.5.11.	Etats particuliers de déformation .....	50
2.6.	Représentation de Mohr .....	51
2.6.1.	Définition .....	52
2.6.2.	Propriétés du tricerle de Mohr .....	52
2.7.	Equations de compatibilité .....	55
2.7.1.	Détermination des équations de compatibilité .....	58
2.7.2.	Exemple d'utilisation .....	58
	59	
<b>Chapitre 3. Contraintes</b> .....		61
3.1.	Notions d'efforts externes et internes .....	61
3.1.1.	Les efforts extérieurs .....	61
3.1.2.	Les efforts internes .....	62
3.2.	Principe de la coupure et vecteur contrainte .....	63
3.2.1.	Relations d'équilibre .....	64
3.2.2.	Vecteur contrainte .....	66
3.3.	Tenseurs de contraintes .....	69
3.3.1.	Tenseur de Cauchy .....	69
3.3.2.	Tenseur de Boussinesq (premier tenseur de Piola-Kirchhoff) ....	72
3.3.3.	Second tenseur de Piola-Kirchhoff .....	72
3.3.4.	Exemples .....	73
3.4.	Propriétés du tenseur de Cauchy .....	76
3.4.1.	Equation d'équilibre local .....	76
3.4.2.	Symétrie du tenseur de contraintes .....	78
3.4.3.	Convention de signes .....	81

3.4.4. Changement de base .....	81
3.4.5. Contraintes et directions principales .....	82
3.4.6. Représentation de Mohr .....	83
3.4.7. Etats particuliers de contraintes .....	85
3.5. Courbes remarquables .....	89
<b>Chapitre 4. Thermodynamique des milieux continus</b> .....	91
4.1. Dérivée de l'intégrale volumique d'une fonction scalaire du point .....	91
4.2. Conservation de la masse .....	93
4.3. Premier principe de la thermodynamique .....	94
4.4. Second principe de la thermodynamique .....	97
4.4.1. Inégalité de Clausius-Duhem .....	97
4.4.2. Lois d'état .....	99
4.4.3. Dissipation intrinsèque, dissipation thermique .....	101
4.5. Théorèmes des travaux virtuels et des travaux virtuels complémentaires .....	101
<b>Chapitre 5. Lois de comportement élastique linéaire</b> .....	105
5.1. Ecriture générale .....	105
5.2. Symétrie de la matrice des rigidités .....	109
5.3. Relations de symétrie matérielle .....	110
5.3.1. Matériau possédant un plan de symétrie .....	110
5.3.2. Matériau orthotrope .....	112
5.3.3. Matériau unidirectionnel (isotropie transverse) .....	113
5.3.4. Matériau à symétrie cubique .....	115
5.3.5. Matériau isotrope .....	115
5.3.6. Récapitulatif .....	119
5.4. Orthotropie .....	120
5.4.1. Rotation autour d'un axe .....	122
5.4.2. Relations entre rigidités et souplesses .....	125
5.4.3. Définition des caractéristiques techniques .....	126
5.4.4. Etat plan de contraintes .....	130
5.4.5. Représentation polaire de la matrice des rigidités .....	133
5.4.6. Détermination expérimentale des caractéristiques techniques ...	135
5.5. Thermoélasticité .....	138
5.5.1. Solide isotrope .....	138
5.5.2. Solide orthotrope .....	140
<b>Chapitre 6. Critères de limite élastique</b> .....	143
6.1. Critère de Tresca .....	144
6.2. Critère de Von Mises .....	148
6.3. Critère de Mohr .....	150
6.4. Matériaux orthotropes .....	152

6.4.1. Dissymétrie en traction et en compression dans les axes d'orthotropie .....	152
6.4.2. Dissymétrie au cisaillement .....	153
6.4.3. Exemples de propriétés mécaniques .....	154
6.4.4. Critère de la contrainte maximale .....	155
6.4.5. Critère interactif de Tsai (ou de Hill) .....	156
6.4.6. Critère tensoriel de Tsai ou Wu ou Tsai-Wu .....	159
<b>Chapitre 7. Equations de l'élasticité linéaire</b> .....	
7.1. Bilan .....	163
7.1.1. Récapitulatif des équations .....	163
7.1.2. Conditions aux limites .....	163
7.1.3. Principe de Saint-Venant .....	163
7.1.4. Résolution analytique d'un problème par la méthode des déplacements .....	165
7.2. Equation aux déplacements .....	167
7.3. Ondes planes dans les solides élastiques .....	169
7.4. Relations de Beltrami (contraintes) .....	171
7.5. Elastostatique plane .....	174
7.5.1. Etats plans de déformations ou de contraintes .....	176
7.5.2. Fonction d'Airy .....	176
7.6. Equations des plaques minces .....	178
7.6.1. Hypothèses .....	179
7.6.2. Sollicitation de membrane .....	179
7.6.3. Sollicitation en cisaillement .....	182
7.6.4. Sollicitation en flexion et torsion .....	185
7.6.5. Cas particuliers .....	185
7.6.6. Equations d'équilibre .....	187
7.7. Théorèmes variationnels en élastostatique .....	188
<b>Chapitre 8. Sollicitations simples</b> .....	193
8.1. Traction-compression .....	193
8.1.1. Données du problème .....	193
8.1.2. Résolution .....	194
8.2. Torsion d'un arbre cylindrique .....	196
8.2.1. Données du problème .....	196
8.2.2. Cas d'une section-droite de forme quelconque .....	197
8.2.3. Cas d'une section circulaire .....	202
8.3. Flexion d'une poutre cylindrique .....	203
8.3.1. Données du problème .....	203
8.3.2. Relation entre le moment fléchissant et l'effort tranchant .....	204
8.3.3. Flexion pure .....	205
8.3.4. Influence de l'effort tranchant .....	213

<b>Chapitre 9. Notions de viscoélasticité linéaire</b> .....	219
9.1. Principe de superposition de Boltzmann .....	219
9.2. Essais harmoniques .....	222
9.3. Représentation spectrale du comportement viscoélastique .....	223
9.4. Principe de causalité .....	225
9.5. Modèles analogiques .....	225
9.6. Généralisation de l'équation constitutive .....	227
9.7. Principe d'équivalence fréquence-température .....	228
<b>Annexe A. Vecteurs et tenseurs</b> .....	231
A.1. Changement de bases .....	231
A.2. Définition d'un tenseur .....	233
A.2.1. Tenseur de rang 0 .....	233
A.2.2. Tenseur de rang 1 .....	233
A.2.3. Tenseur de rang 2 .....	234
A.2.4. Tenseur de rang $r$ .....	234
A.3. Produits .....	235
A.3.1. Produit tensoriel d'un tenseur et d'un vecteur .....	235
A.3.2. Produit tensoriel de deux vecteurs .....	235
A.3.3. Produit contracté de deux vecteurs .....	235
A.3.4. Produit contracté d'un tenseur de rang 2 et d'un vecteur .....	236
A.3.5. Produit contracté de deux tenseurs de rang 2 .....	236
A.3.6. Produit doublement contracté de deux tenseurs de rang 2 .....	236
A.3.7. Produit doublement contracté d'un tenseur de rang 4 par un tenseur de rang 2 .....	237
A.3.8. Pseudo-tenseur rotation .....	237
A.4. Relations d'analyses vectorielle ou tensorielle en repère cartésien .....	238
A.4.1. Opérateur différentiel .....	238
A.4.2. Gradient d'un scalaire .....	238
A.4.3. Divergence d'un vecteur .....	239
A.4.4. Laplacien d'un scalaire .....	239
A.4.5. Gradient d'un vecteur .....	239
A.4.6. Rotationnel d'un vecteur .....	240
A.4.7. Divergence d'un tenseur de rang 2 .....	240
A.4.8. Rotationnel d'un tenseur de rang 2 .....	240
A.5. Coordonnées curvilignes .....	241
A.5.1. Cas général .....	241
A.5.2. Coordonnées cylindriques .....	244
A.5.3. Coordonnées sphériques .....	246
A.6. Quelques relations utiles .....	248
<b>Annexe B. Utilisation des jauges extensométriques</b> .....	251
B.1. Principe .....	251

B.2. Rosette à $45^\circ$ .....	256
B.3. Rosette à $120^\circ$ .....	257
B.4. Mesure indirecte du glissement .....	258
<b>Annexe C. Photoélasticimétrie</b> .....	
C.1. Introduction .....	261
C.2. Lumière polarisée .....	261
C.3. Biréfringence .....	262
C.4. Lois fondamentales de la photoélasticité .....	262
C.5. Dispositif expérimental .....	263
C.6. Etude du rayon lumineux observé .....	264
<b>Annexe D. Notions de calcul variationnel</b> .....	
D.1. Cas d'une fonction d'une variable réelle .....	269
D.2. Cas d'une fonctionnelle .....	270
D.3. Fonctionnelle d'ordre plus élevé .....	270
D.4. Exemple .....	274
<b>Annexe E. Relations mathématiques diverses</b> .....	
E.1. Produit de convolution .....	277
E.2. Distribution de Dirac .....	277
E.2.1. Définition .....	277
E.2.2. Propriétés .....	277
E.3. Transformation de Fourier .....	277
E.3.1. Définitions .....	278
E.3.2. Règles de calcul .....	278
E.4. Transformation de Hilbert .....	279
E.5. Causalité .....	280
<b>Formulaire</b> .....	281
<b>Bibliographie</b> .....	283
<b>Index</b> .....	305
	307