

Table des matières

Introduction	7
1 Équation d'Euler-Lagrange	9
1.1 Introduction.	9
1.1.1 Quelques exemples.	9
1.1.2 Formulations analytiques.	10
1.2 L'équation d'Euler-Lagrange.	11
1.2.1 A la recherche d'une condition nécessaire.	11
1.2.2 Choix d'un espace fonctionnel et d'une distance.	13
1.2.3 Équation d'Euler-Lagrange.	15
1.3 Cas particuliers. (Intégrales Premières).	16
1.4 Cas de plusieurs variables.	17
1.4.1 Équations d'Euler-Lagrange.	17
1.4.2 Lagrangien ne dépendant pas explicitement d'une variable.	18
1.4.3 Lagrangien ne dépendant pas du temps explicitement.	18
1.4.4 Utilisation des intégrales premières.	19
1.4.5 Terminologie.	20
1.5 Variation générale d'une intégrale d'action.	20
1.5.1 Transformation générale.	20
1.5.2 Variations.	22
1.5.3 Variation d'une intégrale.	22
1.5.4 Interprétation des quantités p et H .	25
1.5.5 Théorème de Noether.	27
1.6 Dérivées d'ordre supérieur à un.	28
1.7 Cas de plusieurs variables d'espace.	30
1.7.1 Equations d'Euler-Lagrange.	30
1.7.2 Variation générale de l'action.	32
1.7.3 Théorème de Noether.	34
Résumé.	35
Exercices.	36
2 Contraintes	55
2.1 Introduction.	55
2.2 Extrémales régulières par morceaux.	56

2.2.1	Intérêt d'un espace fonctionnel élargi.	56
2.2.2	Dérivée variationnelle, pour une extrémale $KC1$	58
2.2.3	Condition nécessaire de minimum.	60
2.2.4	Lignes de Maxwell.	61
2.3	Autres problèmes admettant des solutions à dérivée.	62
2.3.1	Force ponctuelle.	62
2.3.2	Extrémales passant par une courbe donnée.	63
2.3.3	Lagrangien discontinu.	64
2.4	Conditions portant sur les extrémités.	66
2.4.1	Extrémités appartenant à une courbe donnée.	66
2.4.2	Extrémité fixée.	67
2.4.3	Condition aux limites naturelle.	67
2.4.4	Loi élastique.	68
2.5	Contraintes.	68
2.5.1	Contraintes intégrales.	68
2.5.2	Contraintes géométriques.	72
2.5.3	Contraintes cinématiques.	73
	Résumé	76
	Exercices	77
3	Mécanique analytique	91
3.1	Cinématique	91
3.1.1	Représentation de la transformation d'un milieu continu.	91
3.1.2	Transformation d'un solide indéformable (ou rigide)	92
3.1.3	Energie cinétique	95
3.1.4	Expression analytique de l'énergie cinétique.	96
3.1.5	Espace de configuration, vitesses virtuelles.	97
3.2	Principe des puissances virtuelles.	99
3.2.1	Indéformabilité de chaque solide du système.	99
3.2.2	Rappel sur l'expression des puissances virtuelles.	99
3.2.3	Puissance virtuelle des quantités d'accélération.	100
3.2.4	Puissance des autres efforts.	101
3.2.5	Principe des puissances virtuelles.	104
3.2.6	Principe d'extremum (en l'absence de liaisons).	104
3.3	Liaisons.	105
3.3.1	Introduction.	105
3.3.2	Liaison ponctuelle bilatérale.	106
3.3.3	Liaison parfaite.	108
3.3.4	Principe d'extremum (liaisons parfaites et holonomes).	109
3.3.5	Exemples et compléments.	111
3.4	Equations de Lagrange. Récapitulation.	114
3.4.1	Le principe des puissances virtuelles.	114
3.4.2	Le calcul de Lagrange.	115
3.4.3	Le cas des liaisons parfaites.	115
3.4.4	Le cas de forces dérivant d'un potentiel.	115
3.4.5	Le cas de liaisons holonomes.	115
3.5	Intégration des équations de Lagrange.	118
3.5.1	Variable cyclique.	118

3.5.2	Système conservatif.	119
3.5.3	Cas classique d'intégrabilité.	120
Exercices	125
4	Hamiltonien et Méthode de Hamilton-Jacobi	137
4.1	Méthode de Hamilton-Jacobi.	137
4.1.1	Variables canoniques.	137
4.1.2	Equation de Hamilton-Jacobi.	141
4.2	Transformations canoniques.	146
4.2.1	Retour sur les équations canoniques.	146
4.2.2	Principe de moindre action.	147
4.2.3	Transformations canoniques.	148
4.2.4	Exemples de transformations canoniques.	150
4.3	L'action réduite comme fonction génératrice.	151
4.3.1	Action réduite	151
4.3.2	Variable angulaire et variable d'action	153
4.3.3	Le problème de Kepler	156
4.4	Extrémales et Transversales	158
4.4.1	Surfaces transversales	158
4.4.2	Champ de Legendre et Intégrale de Hilbert.	159
Résumé	164
Exercices	165
5	Principe de Maupertuis	171
5.1	Principe de Maupertuis.	171
5.1.1	Méthode de Routh	171
5.1.2	Variable cyclique.	172
5.1.3	Principe de Maupertuis.	173
5.1.4	Exemple.	174
5.2	Optique géométrique (Points de vue de Fermat et Huygens).	176
5.2.1	Introduction.	176
5.2.2	Point de vue de Fermat.	176
5.2.3	Point de vue de Huygens.	177
5.2.4	Extrémales et transversales.	177
5.2.5	Analogie entre Mécanique et Optique.	178
Exercices	184
6	Seconde variation	187
6.1	Conditions de Legendre et de Jacobi.	187
6.1.1	Introduction.	187
6.1.2	Variation seconde.	188
6.1.3	Condition suffisante de minimum, portant sur la variation seconde.	189
6.1.4	Convexité.	189
6.1.5	Opérateur et équation de Jacobi.	190
6.1.6	Points conjugués (condition suffisante).	191
6.1.7	Points conjugués (condition nécessaire).	191
6.2	Recherche des points conjugués.	193
6.2.1	Solutions de l'équation de Jacobi.	193

6.2.2	Solutions de l'équation de Jacobi lorsque $\partial L/\partial \mathbf{x} = 0$.	194
6.3	Généralisations.	195
6.3.1	Cas de n variables.	195
6.3.2	Cas des dérivées d'ordre supérieur.	195
6.3.3	Cas d'une contrainte intégrale.	195
6.4	Variation seconde de l'action fonction des coordonnées.	196
6.5	Minimum fort.	197
6.5.1	Introduction.	198
6.5.2	Condition nécessaire de Weierstrass.	198
6.5.3	Champ, semi-champ et intégrale de Hilbert.	199
6.5.4	Extrémale immergée dans un champ.	201
6.5.5	Condition suffisante de Weierstrass.	204
6.6	Problème en vitesses.	205
6.6.1	Position du problème.	208
6.6.2	Problème en vitesses.	208
6.6.3	Principe variationnel associé au problème en vitesses.	209
6.6.4	Perte de l'unicité ou de l'existence de la solution du problème en vitesses.	209
	Résumé	210
	Exercices	213
		215
7	Formulation des principes physiques	227
7.1	Compléments sur l'équation d'Euler-Lagrange.	227
7.1.1	Introduction.	227
7.1.2	Espace de configuration, espace vectoriel tangent.	228
7.1.3	Base duale; gradient d'une fonction scalaire.	228
7.1.4	Equations contravariantes d'Euler-Lagrange.	229
7.1.5	Sous-Espaces Vectoriels tangents.	230
7.2	Connexion et métrique.	231
7.2.1	Introduction.	231
7.2.2	Choix d'un repère cartésien.	232
7.2.3	Conditions de compatibilité.	234
7.2.4	Quelques exemples.	235
7.3	Lagrangien homogène.	236
7.3.1	Introduction.	236
7.3.2	Équations d'Euler-Lagrange homogènes.	238
	Exercices	241
	Bibliographie	253