

Sommaire

1. Introduction à la théorie de l'intégration

2. Objectifs de la théorie de l'intégration en analyse
3. Différences entre les intégrales de Riemann et de Lebesgue
4. Application de l'intégration dans divers domaines des mathématiques

5. L'intégrale de Riemann

6. Définition et propriétés de l'intégrale de Riemann
7. Critères de Riemann pour la convergence des intégrales
8. Intégration des fonctions continues et des fonctions à singularités
9. Propriétés fondamentales de l'intégrale de Riemann (linéarité, additivité, etc.)

10. L'intégrale de Lebesgue

11. Motivation et introduction à l'intégrale de Lebesgue
12. Espaces mesurables et σ -algèbres
13. Mesurabilité des fonctions et des ensembles
14. Définition de l'intégrale de Lebesgue
15. Propriétés de l'intégrale de Lebesgue (linéarité, monotonie, etc.)

16. Convergence et théorèmes de convergence

17. Théorème de convergence monotone (Lebesgue)
18. Théorème de Fatou
19. Théorème de la convergence dominée
20. Convergence presque partout et intégration

21. Intégration dans \mathbb{R}^n et fonctions multivariées

22. Intégrale de Lebesgue dans des espaces de dimension n
23. Intégration sur des produits de mesures
24. Intégrale de Lebesgue pour des fonctions à plusieurs variables
25. Applications aux intégrales sur les sous-ensembles de \mathbb{R}^n

26. Intégration et espace de Banach

27. Espaces de Banach et L^p -espace
28. Intégration dans les espaces de Banach
29. Normes L^p et propriétés de l'intégrale
30. Théorème de Minkowski et d'Hölder

31. Théorème de Fubini et applications

32. Énoncé du théorème de Fubini pour les intégrales multiples
33. Applications du théorème de Fubini dans le calcul des intégrales
34. Intégrales dans des espaces mesurables produits

35. Intégration et différentiation

36. Théorème de la dérivée sous l'intégrale
37. Différentiation des fonctions intégrées
38. Lien entre différentiation et intégration dans les espaces de Lebesgue
39. Théorème de Schwartz sur la différentiation dans les espaces fonctionnels

40. Théorie de la mesure et de l'intégration

41. Mesures sur les espaces mesurables
42. Mesures de Lebesgue et Borel
43. Caractéristiques des mesures sur des ensembles de \mathbb{R}^n
44. Propriétés de l'intégrale par rapport à des mesures non-standard

45. Convergence des suites et séries intégrables

46. Convergence uniforme et intégration
47. Convergence absolue et intégration

- 48. Séries et intégrales : relations et applications
- 49. Test de convergence pour les séries intégrables

50. Applications de l'intégration

- 51. Applications de l'intégration dans les probabilités
- 52. Applications en analyse fonctionnelle
- 53. Intégration dans les espaces de Hilbert et Banach
- 54. Modélisation d'applications physiques à l'aide de l'intégrale

55. Exercices pratiques et applications

- 56. Exercices sur la définition et les propriétés de l'intégrale de Lebesgue
- 57. Exercices sur les théorèmes de convergence et leur application
- 58. Problèmes sur l'intégration dans des espaces de Banach
- 59. Exercices sur les séries et suites intégrables
- 60. Applications aux domaines spécifiques comme la théorie des probabilités, la mécanique, et l'analyse fonctionnelle

61. Conclusion et perspectives

- 62. Résumé des concepts abordés
- 63. Applications avancées de la théorie de l'intégration
- 64. Ouverture sur d'autres théories d'intégration et leur impact dans les mathématiques modernes

65. Annexes

- 66. Définitions et propriétés supplémentaires des espaces mesurables
- 67. Rappels sur la théorie des espaces de Banach et de Hilbert
- 68. Tableau des résultats et théorèmes importants