

Table des matières

Avant-propos	7
Chapitre 1 – Formulation lagrangienne	13
COURS	13
1.1. Introduction	13
1.2. Coordonnées généralisées	15
1.3. Forces généralisées	22
1.3.1. Déplacements virtuels	23
1.3.2. Forces généralisées	25
Résumé – Équations de Lagrange : mode d'emploi	28
EXERCICES PROPOSÉS DANS LE COURS	28
E1.1. Permutation des dérivées	28
E1.2. Force de réaction de la perle	28
E1.3. Forces d'inertie généralisées	29
COMPLÉMENTS	30
C1.1. Rappels de cinématique	30
C1.1.1. Composition des vitesses	30
C1.1.2. Composition des accélérations	30
C1.1.3. Énergie cinétique d'un corps solide	31
C1.1.4. Roulement sans glissement	33
C1.2. Liaisons	34
C1.2.1. Multiplicateurs de Lagrange	34
C1.2.2. Degrés de liberté d'un système	37
C1.3. Commentaires	39
EXERCICES ET PROBLÈMES	39
E1.4. La fronde	39
E1.5. La corde glissant sur la table	40
E1.6. Cylindre roulant sur un plateau mobile	40
E1.7. Masse glissant sur un coin glissant	41
E1.8. Le cric	41
E1.9. Principe de d'Alembert et poussée d'Archimède	42
E1.10. Une porte de garage astucieuse	43
P1.11. Une expérience pour mesurer la vitesse de rotation de la Terre	44
P1.12. L'indicateur de virage	44
P1.13. Le pendule de Huygens	46
P1.14. Essieu libre sur un plan incliné (liaisons non holonômes)	47

INDICATIONS ET RÉPONSES	48
E1.4. La fronde	48
E1.5. La corde glissant sur la table	48
E1.6. Cylindre roulant sur un plateau mobile	49
E1.7. Masse glissant sur un coin	49
E1.8. Le cric	49
E1.9. Poussée d'Archimède.....	49
E1.10. Porte de garage astucieuse.....	49
P1.11. Expérience de Compton	49
P1.12. Indicateur de virage	50
P1.13. Pendule de Huygens	50
P1.14. Essieu libre sur un plan incliné	50
Chapitre 2 – Systèmes lagrangiens.....	53
COURS.....	53
2.1. Introduction	53
2.2. Fonction de Lagrange.....	54
2.3. Intégrales premières.....	57
2.3.1. Coordonnée cyclique	57
2.3.2. Translation continue du temps	58
2.3.3. Translation continue d'espace.....	60
2.3.4. Invariance par rotation continue d'espace.....	61
2.3.5. Conclusion sur les intégrales premières.....	62
2.4. Systèmes à deux corps	62
2.4.1. Formulation	62
2.4.2. Invariance par translation du temps.....	63
2.4.3. Invariance par translation d'espace	63
2.4.4. Invariance par rotation	65
2.4.5. Description complète du mouvement par quadrature.....	67
2.5. Équilibre et petites oscillations.....	69
2.5.1. Rappels pour les systèmes à une dimension.....	70
2.5.2. Cas de deux coordonnées	72
<i>Résumé – Fonction de Lagrange</i>	<i>76</i>
EXERCICES PROPOSÉS DANS LE COURS	76
E2.1. Changement de lagrangien.....	76
E2.2. Intégrale première provenant de la translation dans le temps	77
E2.3. Théorème d'Euler	77
E2.4. Le cerceau à vitesse angulaire constante	78
COMPLÉMENTS.....	79
C2.1. Particule dans un champ électromagnétique	79
C2.1.1. Potentiel généralisé et force de Lorentz	79
C2.1.2. Arbitraire du lagrangien et invariance de jauge.....	80
C2.2. Passage au continu	80

C2.2.1. Corde vibrante	80
C2.2.2. Chaîne de pendules.....	82
C2.3. Traitement général des petites oscillations.....	83
C2.4. Le théorème de Noether.....	88
C2.5. Lien entre impulsion individuelle et moment angulaire total associé aux rotations.....	86
C2.6. Fonction de dissipation.....	88
C2.7. Le problème de Kepler.....	89
EXERCICES ET PROBLÈMES.....	92
E2.5. Disque sur un coin en mouvement	92
E2.6. Constance du moment cinétique	92
E2.7. Mouvement cyclotron.....	93
E2.8. Intégrale de Painlevé (1).....	93
E2.9. Intégrale de Painlevé (2).....	94
E2.10. Lagrangien dans un référentiel tournant	94
E2.11. Application du théorème de Noether.....	95
E2.12. Ondes transversales élastiques dans un solide (ondes P).....	95
E2.13. Petites oscillations avec amortissement.....	96
P2.14. Dérive d'une particule dans un champ électromagnétique constant	97
P2.15. Vibration d'une molécule linéaire triatomique. Le mode "mou"	98
P2.16. Le pendule de L. Foucault.....	98
P2.17. Précession des équinoxes	100
P2.18. Système de trois particules	102
P2.19. Vibration de flexion d'une lame	103
P2.20. Ondes solitaires.....	105
P2.21. Modes de vibration d'une chaîne d'atomes.....	106
INDICATIONS ET RÉPONSES.....	107
E2.5. Disque sur un coin en mouvement	107
E2.6. Constance du moment cinétique	107
E2.7. Mouvement cyclotron.....	107
E2.8. Intégrale de Painlevé (1).....	107
E2.9. Intégrale de Painlevé (2).....	108
E2.10. Lagrangien dans un référentiel tournant	108
E2.11. Application du théorème de Noether.....	108
E2.12. Ondes transversales élastiques dans un solide (ondes P).....	109
E2.13. Petites oscillations avec amortissement.....	109
P2.14. Dérive d'une particule dans un champ électromagnétique constant	109
P2.15. Vibration d'une molécule linéaire triatomique. Le mode "mou"	110
P2.16. Le pendule de L. Foucault.....	111
P2.17. Précession des équinoxes	111
P2.18. Système de trois particules	112
P2.19. Vibration de flexion d'une lame	113
P2.20. Ondes solitaires.....	113
P2.21. Modes de vibration d'une chaîne d'atomes.....	114

Chapitre 3 – Le principe de Hamilton	117
COURS	117
3.1. La fonctionnelle action	118
3.1.1. Notion de fonctionnelle	118
3.1.2. Fonctionnelle action	119
3.2. Méthode des variations avec des contraintes	125
3.2.1. Contraintes de type holonôme	125
3.2.2. Contraintes de forme intégrale	128
3.3. Mécanique relativiste pour une particule	131
<i>Résumé – Principe de Hamilton</i>	134
EXERCICES PROPOSÉS DANS LE COURS	135
E3.1. Force de Lorentz	135
E3.2. Fonctionnelle avec dérivée seconde	136
COMPLÉMENTS	136
C3.1. Action pour un nombre infini de degrés de liberté : équations de Lagrange pour les champs	136
C3.2. L'action pour le champ scalaire : le potentiel de Yukawa	140
C3.3. Action et mécanique quantique	141
EXERCICES ET PROBLÈMES	143
E3.3. La chute libre	143
E3.4. Action minimum ou maximum ?	144
E3.5. Principe de moindre action ?	144
E3.6. N'existe-t-il qu'une seule solution qui rende stationnaire l'action ?	145
E3.7. Principe de Fermat	146
E3.8. Principe de Maupertuis	146
E3.9. Champ de force uniforme	147
E3.10. Mouvement libre sur un ellipsoïde	148
E3.11. Aire minimum à volume fixé	148
E3.12. Particule relativiste dans un champ de force central	149
E3.13. Chaîne de pendules	150
E3.14. Équation d'onde pour la lame flexible libre	151
E3.15. Champ de Schrödinger	151
P3.16. Forme des films de savon	151
E3.17. La stratégie du skieur	152
P3.18. Loi de Laplace sur la tension superficielle	153
P3.19. Précession de l'orbite de Mercure	154
INDICATIONS ET RÉPONSES	155
E3.3. La chute libre	155
E3.4. Minimum ou maximum ?	155
E3.5. Principe de moindre action ?	156
E3.6. N'existe-t-il qu'une seule solution qui rende stationnaire l'action ?	156
E3.7. Principe de Fermat	157

E3.8. Principe de Maupertuis	157
E3.9. Champ de force uniforme	158
E3.10. Mouvement libre sur un ellipsoïde	158
E3.11. Aire minimum à volume fixé	158
E3.12. Particule relativiste dans un champ de force central	158
E3.13. Chaîne de pendules	159
E3.14. Équation d'onde pour la lame flexible libre	160
E3.15. Champ de Schrödinger	160
P3.16. Forme des films de savon	160
P3.17. La stratégie du skieur	160
P3.18. Loi de Laplace sur la tension superficielle	160
P3.19. Précession de l'orbite de Mercure	161
Chapitre 4 – Formalisme hamiltonien	163
COURS	163
4.1. Introduction	163
4.2. La transformation de Legendre d'une fonction	165
4.3. Les équations de Hamilton	167
4.3.1. La fonction de Hamilton	167
4.3.2. Les équations de Hamilton	168
4.4. Théorème de Liouville	171
4.4.1. Flot hamiltonien	171
4.4.2. Théorème de Liouville	174
4.4.3. Théorème du retour de Poincaré	177
4.5. Systèmes autonomes à un degré de liberté	179
<i>Résumé – Équations de Hamilton</i>	<i>187</i>
EXERCICES PROPOSÉS DANS LE COURS	189
E4.1. Transformation de Legendre inverse	189
E4.2. Conservation de l'aire	189
E4.3. Le premier invariant intégral	190
E4.4. Comportement autour d'un point elliptique	190
COMPLÉMENTS	191
C4.1. Principe de moindre action et formalisme hamiltonien	191
C4.2. Résonance paramétrique	192
C4.3. Espace de phase et mécanique quantique	196
EXERCICES ET PROBLÈMES	198
E4.5. Plus rapide et plus écologique que le Concorde	198
E4.6. Les charges électriques peuvent être piégées par des conducteurs	199
E4.7. Double puits parabolique	200
E4.8. Hamiltonien d'une particule chargée	201
E4.9. Quid des systèmes non autonomes	201
E4.10. Temps et énergie : variables conjuguées ?	201
E4.11. Stabilité des trajectoires circulaires dans un potentiel central	202

E4.12. Trajectoires dans un champ de force central	203
E4.13. Symétrie de la trajectoire	203
E4.14. Hamiltonien dans un référentiel tournant	204
E4.15. Flots hamiltoniens identiques	204
E4.16. Équation de Maxwell-Vlasov	204
P4.17. Perle sur le cerceau	205
P4.18. Le pendule inversé	206
P4.19. Lumineuses équations de Hamilton	207
P4.20. Le vecteur de Runge-Lenz	208
P4.21. L'application du billard	209
INDICATIONS ET RÉPONSES	210
E4.5. Plus rapide et plus écologique que le Concorde.....	210
E4.6. Les charges électriques piégées par des conducteurs.....	211
E4.7. Double puits parabolique.....	211
E4.8. Hamiltonien d'une particule chargée	212
E4.9. Quid des systèmes non autonomes	212
E4.10. Temps et énergie : variables conjuguées ?	212
E4.11. Trajectoires circulaires dans un potentiel central	212
E4.12. Trajectoires dans un champ de force central	213
E4.13. Symétrie de la trajectoire.....	214
E4.14. Hamiltonien dans un référentiel tournant.....	214
E4.15. Flots hamiltoniens identiques	214
E4.16. Équation de Maxwell-Vlasov	214
P4.17. Perle sur le cerceau.....	214
P4.18. Le pendule inversé	216
P4.19. Lumineuses équations de Hamilton	217
P4.20. Le vecteur de Runge-Lenz	217
P4.21. L'application du billard	217
Chapitre 5 – Formalisme de Hamilton-Jacobi.....	219
COURS.....	219
5.1. La fonction action : deuxième acte	219
5.2. L'équation de Hamilton-Jacobi	222
5.3. Le théorème de Jacobi	224
5.4. La fonction action réduite	226
5.5. Cas de séparation des variables	228
<i>Résumé – Équations de Hamilton-Jacobi</i>	<i>233</i>
EXERCICES PROPOSÉS DANS LE COURS	233
E5.1. Action pour l'oscillateur harmonique à une dimension	233
E5.2. Action <i>versus</i> action réduite	234
COMPLÉMENTS.....	235
C5.1. Principe de Maupertuis	235
C5.2. Analogie optique-mécanique	239

C5.3. Ondes / approximation eikonale	241
C5.4. Schrödinger <i>versus</i> Hamilton-Jacobi	243
EXERCICES ET PROBLÈMES	244
E5.3. Vitesse de phase et vitesse de groupe	244
E5.4. Hamiltonien séparable, action séparable	245
E5.5. Principe de Maupertuis avec champ électromagnétique	246
E5.6. Mouvement sur une surface et géodésique	247
P5.7. Surface d'onde pour la chute libre	248
P5.8. Effet Stark	248
P5.9. Fronts d'onde bizarres	248
P5.10. Lentille électrostatique	249
P5.11. Orbites des satellites de la Terre	250
INDICATIONS ET RÉPONSES	253
E5.3. Vitesse de phase et vitesse de groupe	253
E5.4. Hamiltonien séparable, action séparable	253
E5.5. Principe de Maupertuis avec champ électromagnétique	254
E5.6. Mouvement sur une surface et géodésique	254
P5.7. Surface d'onde et chute libre	254
P5.8. Effet Stark	255
P5.9. Fronts d'onde bizarres	255
P5.10. Lentille électrostatique	256
P5.11. Orbites des satellites de la Terre	256
Chapitre 6 – Systèmes intégrables	257
COURS	257
6.1. Systèmes réguliers ou chaotiques ?	257
6.2. Notion et exemple de systèmes intégrables	259
6.3. Un système intégrable très simple	261
6.4. Systèmes intégrables à plus d'un degré de liberté	267
6.4.1. Crochets de Poisson : le minimum à savoir	267
6.4.2. Systèmes intégrables	269
6.5. Variables angles-actions	273
6.5.1. Indépendance du contour	274
6.5.2. Définition des variables angles-actions	275
6.5.3. Quasi-périodicité ou périodicité	278
<i>Résumé – Systèmes intégrables</i>	279
EXERCICES PROPOSÉS DANS LE COURS	280
E6.1. Transformations ponctuelles	280
E6.2. Conservation des aires dans une transformation canonique	281
E6.3. Expression de la période pour un mouvement à une dimension	281
E6.4. Quid des systèmes non autonomes	282
E6.5. Calcul du crochet de Poisson $\{q,p\}$	282