

TABLE DES MATIÈRES

Préface	9
Chapitre premier. INTRODUCTION	13
§ 1.1. D'où proviennent les problèmes d'extrémum?	13
1.1.1. Le problème isopérimétrique classique. Problème de Didon (13). 1.1.2. Autres anciens problèmes géométriques d'extrémum (18). 1.1.3. Principe variationnel de Fermat et principe de Huygens. Le problème de réfraction de la lumière (22). 1.1.4. Problème du brachistochrone. Les débuts du calcul des variations (25). 1.1.5. Problème aérodynamique de Newton (28). 1.1.6. Problèmes de rationnement et de transport (29). 1.1.7. Problème de temps minimum (29).	
§ 1.2. Comment formaliser un problème d'extrémum?	30
1.2.1. Définitions fondamentales (30). 1.2.2. Premiers exemples de formalisation des problèmes d'extrémum (31). 1.2.3. Formalisation du problème de Newton (33). 1.2.4. Diverses formalisations du problème isopérimétrique classique et du problème du brachistochrone. Le problème le plus simple de temps minimum (35). 1.2.5. Formalisation du problème de transport et du problème de rationnement (38). 1.2.6. Principales classes de problèmes d'extrémum (39)	
§ 1.3. Méthode des multiplicateurs de Lagrange et théorème de Kuhn-Tucker	44
1.3.1. Théorème de Fermat (44). 1.3.2. Méthode des multiplicateurs de Lagrange (46). 1.3.3. Théorème de Kuhn-Tucker (51). 1.3.4. Démonstration du théorème de séparation en dimension finie (55).	
§ 1.4. Problème élémentaire du calcul des variations classique et ses généralisations	57
1.4.1. Equation d'Euler (57). 1.4.2. Conditions nécessaires dans le problème de Boltz. Conditions de transversalité (62). 1.4.3. Généralisation du problème élémentaire (64). 1.4.4. Variations en aiguille. Condition de Weierstrass (72). 1.4.5. Problème isopérimétrique et problème aux dérivées d'ordres supérieurs (75).	
§ 1.5. Problème de Lagrange et problème fondamental de commande optimale	79
1.5.1. Position des problèmes (79). 1.5.2. Conditions nécessaires du problème de Lagrange (80). 1.5.3. Principe du	

	maximum de Pontriaguine (82). 1.5.4. Démonstration du principe du maximum dans le problème à extrémité libre (85).	
§ 1.6.	Résolution des problèmes	92
	1.6.1. Problèmes géométriques d'extrémum (92). 1.6.2. Problème aérodynamique de Newton (97). 1.6.3. Le problème élémentaire de temps minimum (100). 1.6.4. Le problème isopérimétrique classique et le problème de Tchaplyguine (104). 1.6.5. Problème du brachistochrone et quelques problèmes géométriques (109).	
Chapitre II.	APPAREIL DE LA THÉORIE DES PROBLÈMES D'EXTRÊMUM	112
§ 2.1.	Notions préliminaires d'analyse fonctionnelle	112
	2.1.1. Espaces vectoriels normés et espaces de Banach (112). 2.1.2. Produits d'espaces. Espaces quotients (114). 2.1.3. Théorème de Hahn-Banach et ses conséquences (116). 2.1.4. Théorèmes de séparabilité (119). 2.1.5. Théorème de Banach sur l'opérateur inverse et lemme sur l'application inverse à droite (123). 2.1.6. Lemme sur l'image fermée (124). 2.1.7. Lemme sur l'annulateur du noyau d'un opérateur régulier (125). 2.1.8. Fonctions absolument continues (126). 2.1.9. Théorème de Riesz sur la forme générale d'une fonctionnelle linéaire dans l'espace C . Formule de Dirichlet (129).	
§ 2.2.	Eléments du calcul différentiel dans un espace vectoriel normé	131
	2.2.1. Dérivée suivant une direction donnée, première variation, dérivées de Gâteaux et de Fréchet, différentiabilité stricte (131). 2.2.2. Théorème de superposition des applications différentiables (139). 2.2.3. Théorème de la moyenne et ses corollaires (142). 2.2.4. Dérivation dans un produit d'espaces. Dérivées partielles. Théorème sur la différentielle totale (145). 2.2.5. Dérivées d'ordres supérieurs. Formule de Taylor (148).	
§ 2.3.	Théorème des fonctions implicites	155
	2.3.1. Énoncé du théorème d'existence des fonctions implicites (156). 2.3.2. Modification du principe des applications contractantes (156). 2.3.3. Démonstration du théorème (158). 2.3.4. Théorèmes classiques des fonctions implicites et des applications inverses (160). 2.3.5. Espace tangent et théorème de Lusternik (165).	
§ 2.4.	Différentiabilité de certaines applications concrètes	168
	2.4.1. Opérateur de Nemytski et opérateur de relation différentiable (168). 2.4.2. Fonctionnelle intégrale (171). 2.4.3. Opérateur des conditions aux limites (175).	
§ 2.5.	Renseignements nécessaires provenant de la théorie des équations différentielles ordinaires	177
	2.5.1. Hypothèses principales (177). 2.5.2. Théorème local d'existence (179). 2.5.3. Théorème d'unicité (182). 2.5.4. Équations différentielles linéaires (184). 2.5.5. Théorème global sur l'existence et la dépendance continue de la solution des données initiales et des paramètres (188). 2.5.6. Théorème sur la dépendance différentiable des solutions en fonction des conditions initiales (193). 2.5.7. Théo-	

rème classique sur la dépendance différentiable des solutions en fonction des données initiales (197).	
§ 2.6*. Éléments d'analyse convexe	201
2.6.1. Principales définitions (201). 2.6.2. Ensembles et fonctions convexes dans les espaces vectoriels topologiques (208). 2.6.3. Transformation de Legendre-Young-Fenchel. Théorème de Fenchel-Moreau (215). 2.6.4. Subdifférentielle. Théorème de Moreau-Rockafellar. Théorème de Dubovitski-Milioutine (220).	
Chapitre III. PRINCIPE DE LAGRANGE POUR LES PROBLÈMES DIFFÉRENTIABLES À CONTRAINTES	228
§ 3.1. Problèmes élémentaires	228
3.1.1. Problèmes élémentaires sans contraintes (228). 3.1.2. Problème élémentaire de programmation linéaire (233). 3.1.3. Problème de Boltz (234). 3.1.4. Problème élémentaire de commande optimale (237). 3.1.5. Le principe de Lagrange pour les problèmes à égalités et à inégalités (238).	
§ 3.2. Principe de Lagrange pour les problèmes différentiables à contraintes sous forme d'égalités et d'inégalités	241
3.2.1. Énoncé du théorème (241). 3.2.2. La méthode des multiplicateurs pour les problèmes différentiables à égalités (243). 3.2.3. Réduction du problème (245). 3.2.4. Démonstration du théorème (247).	
§ 3.3*. Principe de Lagrange et dualité dans les problèmes de programmation convexe	251
3.3.1. Théorème de Kuhn-Tucker (forme subdifférentielle) (251). 3.3.2. Méthode des perturbations et théorème de dualité (253). 3.3.3. Programmation linéaire: théorème d'existence et théorème de dualité (258). 3.3.4. Théorème de dualité pour le problème de la plus courte distance. Lemme de Hoffmann et lemme du minimax (264).	
§ 3.4*. Conditions nécessaires de deuxième ordre et conditions suffisantes d'extrémum dans les problèmes différentiables	276
3.4.1. Problèmes différentiables à égalités (276). 3.4.2. Problèmes différentiables à égalités et inégalités — conditions nécessaires du deuxième ordre (278). 3.4.3. Conditions nécessaires d'extrémum pour les problèmes différentiables à égalités et inégalités (282).	
§ 3.5. Applications de la théorie à l'algèbre et à l'analyse	285
3.5.1. Théorème fondamental de l'algèbre (285). 3.5.2. Critère de Sylvester (286). 3.5.3. Distance d'un point à un sous-espace. Théorème sur le supplémentaire orthogonal. Déterminants de Gram (288). 3.5.4. Axes principaux d'une forme quadratique. Théorème de Hilbert (291). 3.5.5. Formes quadratiques de Legendre (296).	
Chapitre IV. PRINCIPE DE LAGRANGE DANS LES PROBLÈMES DU CALCUL DES VARIATIONS CLASSIQUE ET LES PROBLÈMES DE COMMANDE OPTIMALE	299
§ 4.1. Principe de Lagrange pour le problème de Lagrange	299
4.1.1. Position du problème et énoncé du théorème (299). 4.1.2. Réduction du problème de Lagrange au problème	

différentiable (304). 4.1.3. Lemme de Dubois-Raymond généralisé (307). 4.1.4. Dédution des conditions de stationnarité (308). 4.1.5. Problème aux dérivées supérieures. Equation d'Euler-Poisson (311).	
§ 4.2. Principe du maximum de Pontriaguine	315
4.2.1. Enoncé du problème de commande optimale (315).	
4.2.2. Enoncé du principe du maximum. Principe de Lagrange dans le problème de commande optimale (320).	
4.2.3. Variations en aiguille (323). 4.2.4. Réduction à un problème de dimension finie (326). 4.2.5. Démonstration du principe de maximum (328). 4.2.6. Démonstration du lemme sur le paquet d'aiguilles (334). 4.2.7. Démonstration du lemme sur les fonctionnelles intégrales (344).	
§ 4.3*. Problèmes de commande optimale linéaires relativement aux variables de phase	346
4.3.1. Réduction du problème de commande optimale linéaire pour les variables de phase à un problème du type de Liapounov (347). 4.3.2. Théorème de Liapounov (349). 4.3.3. Principe de Lagrange pour les problèmes de Liapounov (352). 4.3.4. Théorème de dualité (360). 4.3.5. Principe du maximum pour les problèmes de commande optimale linéaires relativement aux variables de phase (364).	
§ 4.4. Application de la théorie générale au problème le plus simple du calcul des variations classique	368
4.4.1. Equation d'Euler. Condition de Weierstrass (368).	
4.4.2. Conditions de deuxième ordre pour l'extrémum faible. Conditions de Legendre et Jacobi (371). 4.4.3. Formalisme hamiltonien. Théorème sur l'invariant intégral (375). 4.4.4. Conditions suffisantes d'extrémum absolu dans le problème le plus simple (384). 4.4.5. Points conjugués. Conditions suffisantes d'extrémum fort et faible (389). 4.4.6. Théorème de Noether (399). 4.4.7. Principe variationnel et lois de conservation en mécanique (404).	
Problèmes	408
Indications, solutions et réponses	417
Commentaires et indications bibliographiques	431
Bibliographie	434
Liste des principales notations	439
Index terminologique	443